FN03

Étude des fonctions trigonométriques

Version du 24-11-2022 à 12:29

1. Fonction cosinus

Proposition 1 – Fonction cosinus

Ensemble de définition

La fonction cosinus est **définie** sur $\mathbb{R}$ et est **dérivable** sur $\mathbb{R}$:

$$\cos(x) \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} -\sin(x)$$

Caractère borné

Elle est **bornée** sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 \leq \cos(x) \leq 1$$

Parité et périodicité

La fonction cosinus est **paire** et $2\pi-$**périodique** :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(-x) = \cos(x)$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x+2\pi) = \cos(x)$$

Variations de cosinus sur une demi-période

Domaine d'étude

La **connaissance** de $\cos$ sur $[0;\pi]$ **suffit à l'obtention** de $\mathcal{C}_{\cos}$:

- $\cos$ est $2\pi-$périodique, donc on peut l'étudier sur $[-\pi;\pi]$. On obtiendra $\mathcal{C}_{\cos}$ sur $\mathbb{R}$ par répétition successive par translation, du motif de la fonction sur une période.
- $\cos$ est paire, donc on peut l'étudier sur seulement $[0;\pi]$. On obtiendra $\mathcal{C}_{\cos}$ sur $[-\pi;\pi]$ par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

Tableau de variations sur $[0;\pi]$

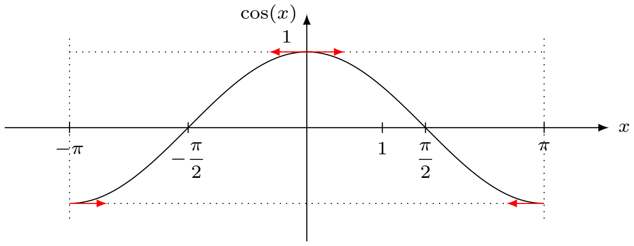
x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
Signe de $\cos'(x)$	0	$-$	-1	$-$	0
Variations de $\cos$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

Tracé de $\mathcal{C}_{\cos}$

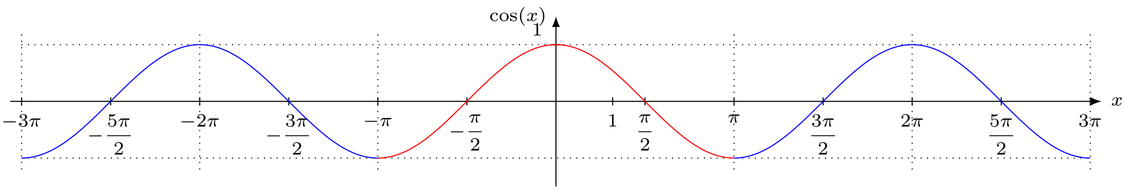
Tracé sur $[-\pi;\pi]$

Sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$, $\mathcal{C}_{\cos}$ présente :

- une tangente horizontale aux points d'abscisse $-\pi$, 0 et π ;
- une tangente de pente 1 en $-\dfrac{\pi}{2}$;
- une tangente de pente -1 en $\dfrac{\pi}{2}$.



Tracé de $\mathcal{C}_{\cos}$ sur $[-3\pi;3\pi]$



$\square$

2. Fonction sinus

Proposition 2 – Fonction sinus

Domaine d'étude

La fonction sinus est **définie** sur $\mathbb{R}$ et est **dérivable** sur $\mathbb{R}$:

$$\sin(x) \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} \cos(x)$$

Caractère borné

Elle est bornée sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 \leq \sin(x) \leq 1$$

Imparité et périodidicté

La fonction sinus est **impaire** et $2\pi-$**périodique** :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(-x) = -\sin(x)$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(x+2\pi) = \sin(x)$$

Variations de la fonction sinus sur une demi-période

Domaine d'étude :

La **connaissance** de $\sin$ sur $[0;\pi]$ **suffit à l'obtention** de $\mathcal{C}_{\sin}$:

- $\sin$ est $2\pi-$périodique, donc on peut l'étudier sur $[-\pi;\pi]$. On obtiendra $\mathcal{C}_{\sin}$ sur $\mathbb{R}$ par répétition successive par translation, du motif de la fonction sur une période
- $\sin$ est impaire, donc on peut l'étudier sur seulement $[0;\pi]$. On obtiendra $\mathcal{C}_{\sin}$ sur $[-\pi;\pi]$ par symétrie par rapport à l'origine du repère.

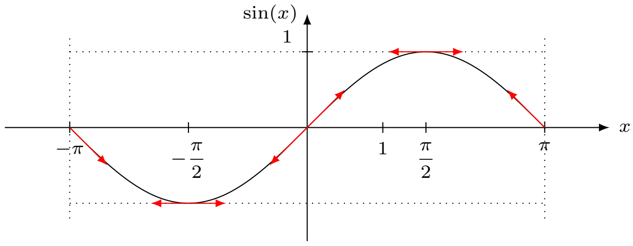
Tableau de variations sur $[0;\pi]$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
Signe de $\sin'(x)$	1	$+$	0	$-$	-1
Variations de $\sin$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

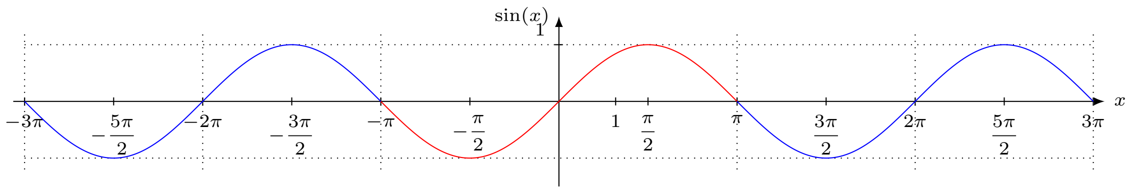
$\mathcal{C}_{\sin}$ sur une période

Tracé sur $[-\pi;\pi]$

Sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$, $\mathcal{C}_{\sin}$ présente :
- une tangente horizontale aux points d'abscisse $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2}$;
- une tangente de pente 1 en 0 ;
- une tangente de pente -1 en $-\pi$ et π.



Tracé de $\mathcal{C}_{\sin}$ sur $[-3\pi;3\pi]$



Position de $\mathcal{C}_{\sin}$ par rapport à sa tangente en 0

La **tangente en 0** à $\mathcal{C}_{\sin}$ est la droite d'équation $y = x$, $\mathcal{C}_{\sin}$ **traverse sa tangente en 0**, et :

$$\forall x \geq 0, \quad \sin(x) \leq x \qquad \text{ainsi que : } \forall x \leq 0, \quad \sin(x) \geq x$$

□

3. La fonction tangente

Définition 1 – Fonction tangente

On appelle **fonction tangente** noté tan, la fonction **définie** par :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \text{ avec } \mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\tan : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\, k \in \mathbb{Z} \right\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} \end{array} \right.$$

□

Proposition 3 – Dérivée de la fonction tangente

tan est **dérivable** en tout point de $\mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\, k \in \mathbb{Z} \right\}$, et :

$$\tan(x) \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Limite en $\pm\dfrac{\pi}{2}$

- $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$.
- $\displaystyle\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$.

Les droites d'équations $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sont des **asymptotes verticales** pour $\mathcal{C}_{\tan}$.

Variations de tangente sur une demi-période

Domaine d'étude :

La **connaissance** de $\tan$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ **suffit à l'obtention** de $\mathcal{C}_{\tan}$:

- $\tan$ est $\pi-$périodique, donc on peut l'étudier sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. On obtiendra $\mathcal{C}_{\tan}$ sur $\mathbb{R}$ par répétition successive par translation, du motif de la fonction sur une période.
- $\tan$ est impaire, donc on peut l'étudier sur seulement $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$. On obtiendra $\mathcal{C}_{\tan}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ par symétrie par rapport à l'origine du repère.

Tableau de variations sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$

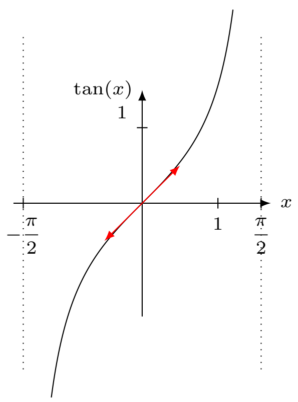
x	0		$+\frac{\pi}{2}$
Signe de $\tan'(x)$	1	$+$	‖
Variations de $\tan$	0	↗	$+\infty$

$\mathcal{C}_{\tan}$ sur une période

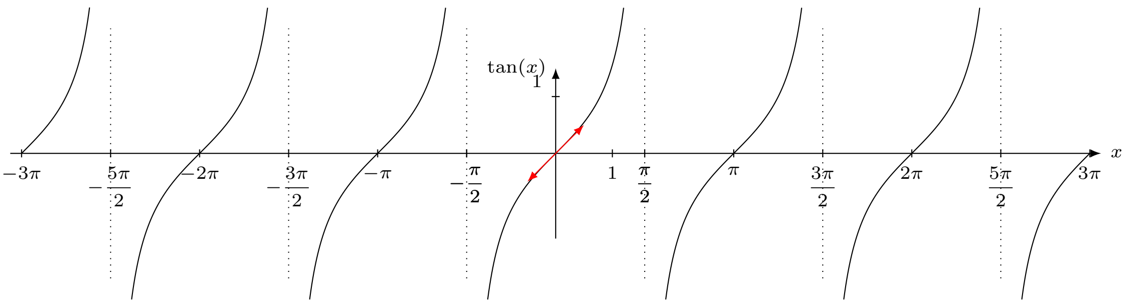
Tracé sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

Sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $\mathcal{C}_{\tan}$:

- présente 0 un tangente de pente 1 ;
- admet les droites d'équations $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = -\frac{\pi}{2}$ pour asymptotes verticales.



Tracé sur $]-3\pi; 3\pi[$



Position de $\mathcal{C}_{\tan}$ par rapport à sa tangente en 0

La **tangente en 0** à $\mathcal{C}_{\tan}$ est la droite d'équation $y = x$.

$\mathcal{C}_{\tan}$ **traverse sa tangente en 0**, et on peut montrer que :

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[, \quad \tan(x) \geq x$$

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right], \quad \tan(x) \leq x$$

□