FN02

Fonctions trigonométriques et expressions trigonométriques

Version du 17-11-2022 à 14:37

Contexte

Dans tout ce qui suit, on suppose que le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ,\vec{j}\right)$.

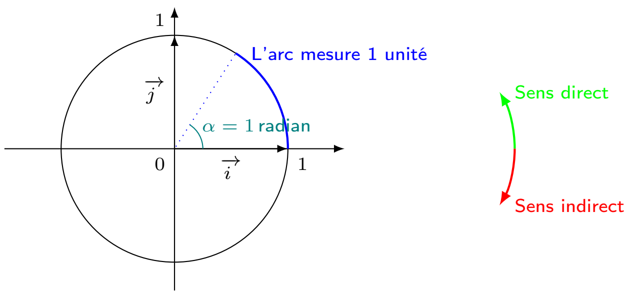
☐

1. Cercle trigonométrique et mesure d'un angle orienté

Définition 1 – Cercle trigonométrique, radian et mesure d'un angle orienté

Le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre O, de rayon 1 et sur lequel on a choisi :

- le sens direct, ou sens positif, qui est contraire au sens des aiguilles d'une montre ;
- le sens indirect, ou sens négatif, qui est le sens des aiguilles d'une montre.



Sur un cercle trigonométrique, **l'angle au centre qui intercepte un arc de longueur 1, mesure 1 radian** et ainsi π radians correspond donc à $180\,^\circ$.

Sur le cercle trigonométrique, **la mesure d'un angle orienté** est égale à la mesure de l'arc intercepté en respectant le sens : mesure positive dans le sens direct, mesure négative dans le sens indirect.

Mesure principale d'un angle orienté

Un angle orienté possède plusieurs mesures.
En effet, si θ est une mesure d'un angle orienté, $\theta + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ est une autre mesure de ce même angle.
Toutefois, **la mesure principale** d'un angle orienté est la mesure de cet angle appartenant à l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

☐

Application|[2599]**| 1| Mesure d'un angle**

Retrouver la mesure principale des angles orientés dont une mesure est :

$\dfrac{19\pi}{2}$	$\dfrac{25\pi}{6}$	$-\dfrac{81}{4}$	$-\dfrac{37\pi}{3}$

☐

2. Fonctions trigonométriques

Définition 2 – Cosinus et sinus d'un angle orienté

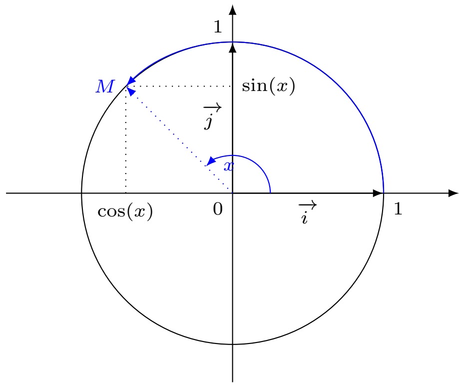
Soit x une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}\right)$ où M est un point du cercle trigonométrique.

Cosinus de x | $\cos(x)$

Abscisse du point M

Sinus de x | $\sin(x)$

Ordonnée du point M



Relations fondamentales | Pour tout $x \in \mathbb{R}$ ...

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1$$

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1$$

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

□

Proposition 1 – Périodicité, parité et symétrie

Fonction cosinus

2π−périodique

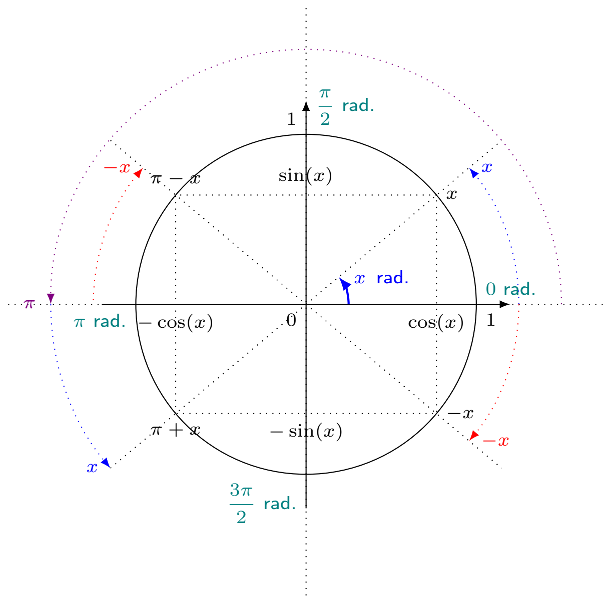
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$$

Fonction paire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(-x) = \cos(x)$$

Propriétés de symétrie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x + \pi) = -\cos(x)$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x - \pi) = -\cos(x)$$



Fonction sinus

2π−périodique

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$

Fonction impaire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin(-x) = -\sin(x)$$

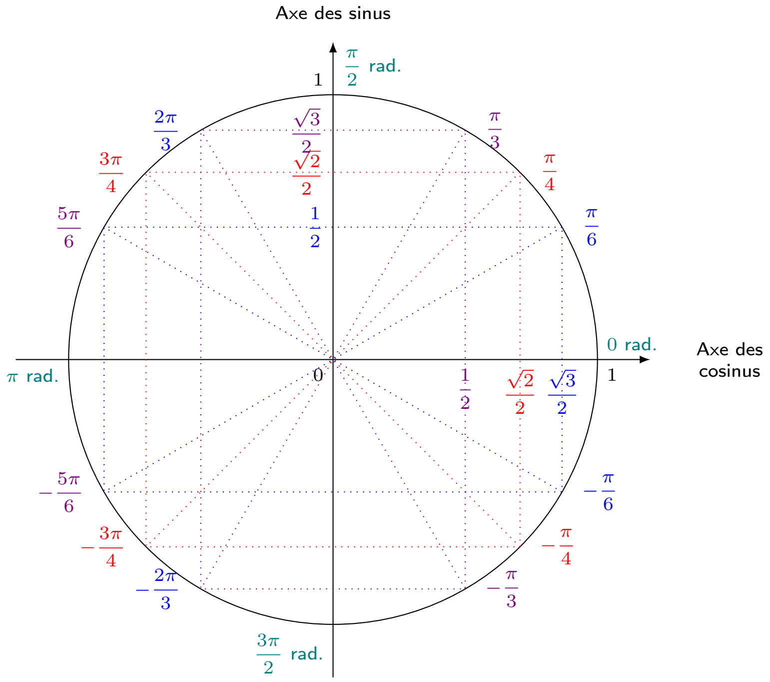
Propriétés de symétrie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x + \pi) = -\sin(x)$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin(\pi - x) = \sin(x)$$

□

Proposition 2 – Lignes trigonométriques et visualisation

x en radians	$\cos(x)$	$\sin(x)$
0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1
$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
π	-1	0



☐

Application | [2601] | 2 | Exploiter les lignes trigonométriques

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ou fausses ?

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

☐ Vrai ☐ Faux

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

☐ Vrai ☐ Faux

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

☐ Vrai ☐ Faux

$$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = -\sin\left(\frac{21\pi}{5}\right)$$

☐ Vrai ☐ Faux

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{21\pi}{5}\right)$$

☐ Vrai ☐ Faux

$$\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) = -\cos\left(-\frac{\pi}{7}\right)$$

☐ Vrai ☐ Faux

$$\cos\left(\frac{19\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

☐ Vrai ☐ Faux

$$\cos\left(\frac{19\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

☐ Vrai ☐ Faux

$$\cos\left(\frac{43\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

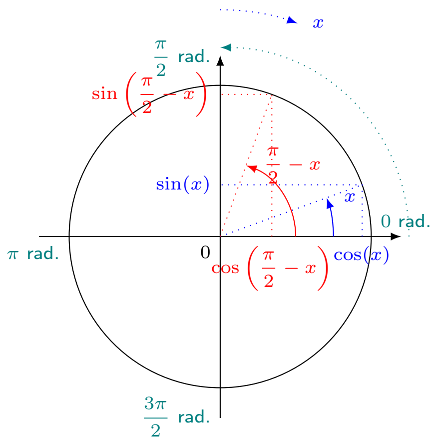
☐ Vrai ☐ Faux

☐

Proposition 3 – Transformer un cosinus en sinus et inversément | Pour tout $x \in \mathbb{R}$

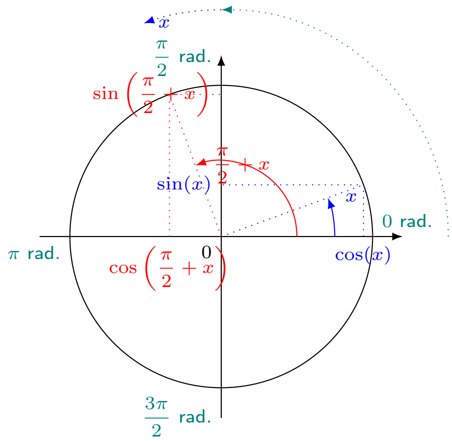
$$\begin{aligned}\sin(x) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\\ \cos(x) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\end{aligned}$$

Visualisation



$$\begin{aligned}\cos(x) &= \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\\ \sin(x) &= -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

Visualisation



□

Application | [2603] | 3 | Exploiter les propriétés de $\cos$ et $\sin$

Simplifier les expressions suivantes où x désigne un réel quelconque :

$$\sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right);$$

$$\sin(x - \pi) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\sin(x + \pi) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(-x);$$

$$\sin(\pi - x) + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right);$$

□

Définition 3 – Fonction tangente

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$, on peut définir le nombre « tangente de x » par :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\tan : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{R}\right\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} \end{array}\right. .$$

□

Pour simplifier les énoncés qui vont suivre, on notera $\mathcal{D}_{\tan}$ le domaine de définition de la fonction tangente.

Proposition 4 – Particularités de la fonction tangente

π-périodique

$$\forall x \in \mathcal{D}_{\tan},\ \tan(x+\pi) = \tan(x)$$

Fonction impaire

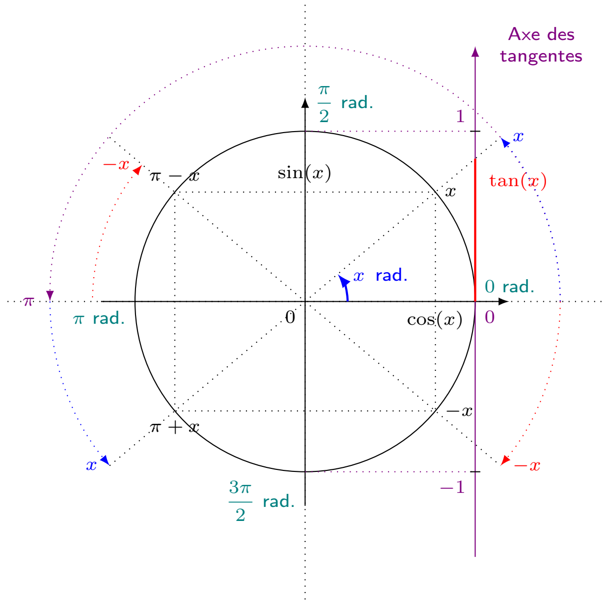
$$\forall x \in \mathcal{D}_{\tan},\ \tan(-x) = -\tan(x)$$

Propriétés de symétrie

$$\forall x \in \mathcal{D}_{\tan}, \tan(\pi - x) = -\tan(x)$$
$$\forall x \in \mathcal{D}_{\tan}, \tan(\pi + x) = \tan(x)$$

$$\forall x \in \mathcal{D}_{\tan}, \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)}$$
(avec $x \neq k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$)

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\boxtimes$



□

Application| [2616] | 4| Manipuler la fonction tangente

Sous réserve d'existence, établir les relations suivantes :

$$\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\frac{1}{\tan(x)} - \tan(x) = \frac{2}{\tan(2x)}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{2}{\cos(2x)}$$

□

3 . Transformations d'expressions trigonométriques

Contexte

Dans tout ce paragraphe, a, b, p et q désignent quatre réels quelconques.

□

Proposition 5 – Formules d'additions des arcs

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

Sous réserve que tout ait du sens : $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$.

☐

Application| [1826] **| 5| Trigonométrie**

Calculer $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ en remarquant que $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$.
De même, en remarquant que $\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}$, calculer $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$.

☐

Application| [1806] **| 6| Déphasage**

Soit $x \in \mathbb{R}$, écrire les expressions suivantes sous la forme d'un seul cosinus :

$\sqrt{3}\cos(3x) - \sin(3x)$	$\cos(x) + \sin(x)$	$\cos(2x) - \sqrt{3}\sin(2x)$	$3\cos(5x) + \sqrt{3}\sin(5x)$

☐

Proposition 6 – Formule de duplication des arcs

$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$

$$\begin{array}{rcl} \cos(2a) & = & \cos^2(a) - \sin^2(a) \\ & = & 2\cos^2(a) - 1 \\ & = & 1 - 2\sin^2(a) \end{array}$$

☐

Application| [2608] **| 7| Utiliser les formules de duplication**

Calculer $\cos(2x)$ dans chacun des cas suivants :

$\cos(x) = -\dfrac{1}{3}$	$\cos(x) = \dfrac{4}{5}$	$\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\sin(x) = \dfrac{3}{4}$

☐