FN01

# Fonctions et représentations graphiques

Version du 10-11-2022 à 10:42

## 1. Domaine de définition d'une fonction

**Définition 1 – Domaine de définition d'une fonction**

Pour une fonction $f : x \longmapsto f(x)$ de la variable réelle, **le domaine de définition de** $f$, souvent noté $\mathcal{D}_f$, est le **plus grand sous-ensemble** de $\mathbb{R}$ des réels $x$ tels que $f(x)$ existe.

On exprimera si possible $\mathcal{D}_f$ sous forme d'**une réunion d'intervalles**.

On peut alors présenter $f$ sous la forme :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dots \end{array} \right.$$

**Obtenir le domaine de définition d'une fonction**

Une fonction de la variable réelle s'apparente à un **algorithme de calcul** que l'on fait subir à la variable $x$ et où des opérations effectuées lors de ce processus sont parfois **conditionnées par des « valeurs interdites »** telles ne pas prendre la racine carrée d'un nombre négatif, diviser par zéro, etc.

Pour déterminer le domaine de définition d'une fonction $f$...

- on décomposera le processus de calcul associé ;
- on identifiera les opérations pour lesquelles il y a des conditions ;
- on traduira ces conditions éventuelles sous forme d'équation(s) ou d'inéquation(s) que l'on résoudra ;
- on explicitera alors $\mathcal{D}_f$ sous forme d'une réunion d'intervalles.

□

**Exemple 1 – Recherche d'un domaine de définition**

?

Donner le domaine de définition de $f : x \longmapsto \dfrac{\sqrt{3x-2}}{x^2-5x+6}$

**Opérations conditionnées par les valeurs de $x$**

**Résolution des équations/inéquations explicitées**

**Valeur(s) de $x$ à exclure | Domaine de définition de $f$**

## 2. Image d'un ensemble par une fonction

**Définition 2 – Image d'un ensemble par une fonction | Pour $f$ une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$**

Ensemble $f(A)$ | $A$ un sous-ensemble de $\mathcal{D}_f$ | $A \subset \mathcal{D}_f$

On appelle **image de** $A$ par $f$ l'ensemble noté $f(A)$ des valeurs prises par $f$ lorsque $x$ décrit $A$ :

$$f(A) = \{f(x),\ x \in A\}$$

Généralement, on se placera dans le cas où $A = \mathcal{D}_f$ ou $A$ un intervalle inclus dans $\mathcal{D}_f$.

**Illustration**

Pour $f : x \longmapsto x^3$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_f &= \mathbb{R} \\ f([2;3]) &= [8;27] \\ f([-1;2]) &= [-1;8]. \end{aligned}$$

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $2$ | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Variations de $f$ : $x \longmapsto x^3$ | $-\infty$ | $-1$ | $8$ | $27$ | $+\infty$ |

**Application| [1947] | 1| Image par une fonction**

À l'aide du tableau de variations ci-contre, déterminer les images par $f$ des intervalles donnés.

| $x$ | $-5$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Variations de $f$ | $-3$ | $0$ | $1$ | $\frac{1}{2}$ | $4$ | $0$ | $-5$ | $-\frac{1}{2}$ |

$f([-3;-1]) =$

$f(]-3;1]) =$

$f([-5;2]) =$

$f(]-1;1[) =$

$f([-4;0[) =$

# 3. Variation d'une fonction

**Définition 3 – Variations | Pour $f$ une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$**

**strictement croissante sur $\mathcal{D}_f$**

$$\forall (x,y) \in \mathcal{D}_f \times \mathcal{D}_f, \quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y)\,;$$

**strictement décroissante sur $\mathcal{D}_f$**

$$\forall (x,y) \in \mathcal{D}_f \times \mathcal{D}_f, \quad x < y \Rightarrow f(x) > f(y)\,;$$

**croissante sur $\mathcal{D}_f$**

$$\forall (x,y) \in \mathcal{D}_f \times \mathcal{D}_f, \quad x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)\,;$$

**décroissante sur $\mathcal{D}_f$**

$$\forall (x,y) \in \mathcal{D}_f \times \mathcal{D}_f, \quad x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)\,;$$

**strictement monotone sur $\mathcal{D}_f$**

si $f$ est strictement décroissante ou strictement croissante sur $\mathcal{D}_f$ ;

**monotone sur $\mathcal{D}_f$**

si $f$ est décroissante ou croissante sur $\mathcal{D}_f$ ;

**Illustration de la définition pour une fonction croissante**

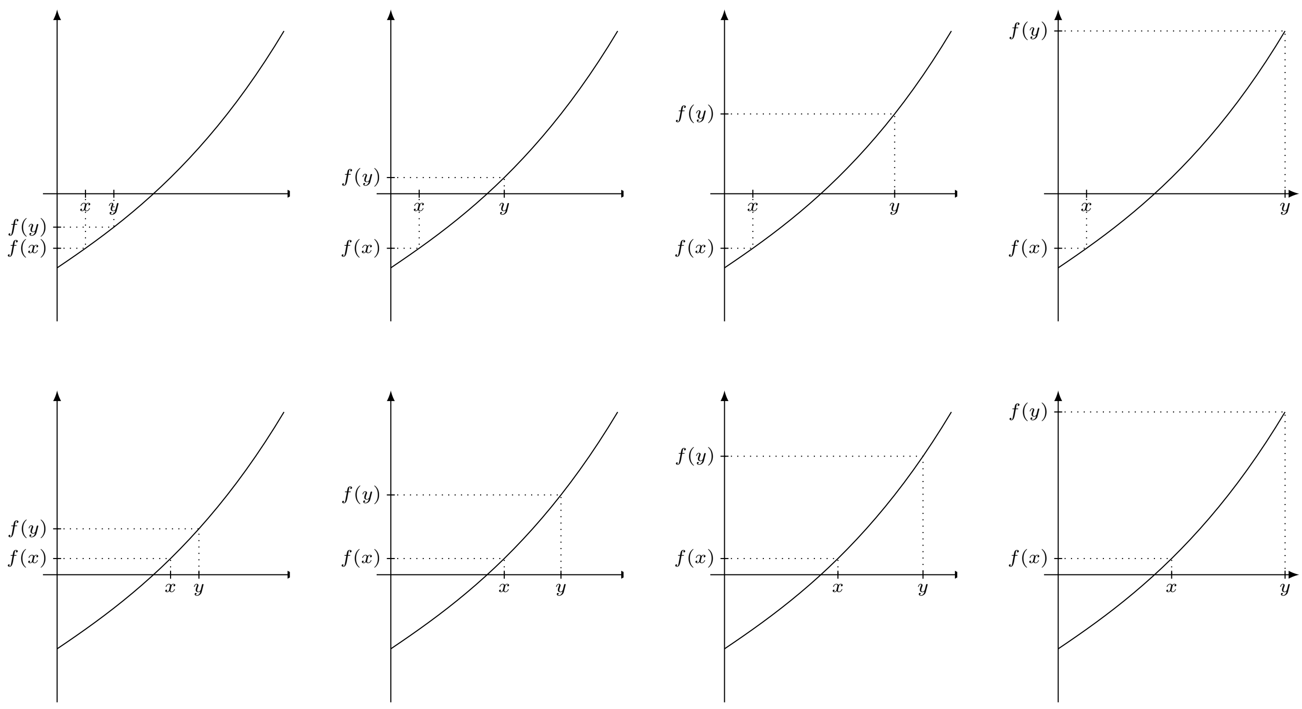



**Tableau de variation d'une fonction**

On récapitule ces variations dans un tableau appelé **tableau de variations**, qui se présente sous la forme :

| $x$ | $\mathcal{D}_f$ |
|---|---|
| Variations de $f$ | |

Par convention, la stricte (dé)croissance sur un intervalle pour une fonction sera représentée par une flèche orientée vers le (bas) haut dans le sens de la croissance de la variable.

□

**Exemple 2 – Construire le tableau de variation d'une fonction**

?

Dresser le tableau de variations de la fonction $f$ définie sur $[2;6]$, croissante sur $[2;5]$ et décroissante sur $[5;6]$ telle que $f(2)=-1$, $f(6)=0$ et dont l'image de 5 est 3.

| $x$ | |
|---|---|
| Variations de $f$ | |

$\square$

# 4. Opérations sur les fonctions

**Définition 4 – Somme et produit de fonctions | $f$ et $g$ deux fonctions définies sur le même ensemble de définition $\mathcal{D}$**

**Fonction $f+g$**

$$f+g : \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)+g(x) \end{array} \right.$$

On écrit : $\forall x \in \mathcal{D}, \quad (f+g)(x) = f(x)+g(x).$

**Illustration**

Pour $f : x \longmapsto \mathrm{e}^x$ et $g : x \longmapsto x^2$ :

$$f+g : x \longmapsto \mathrm{e}^x + x^2$$

**Fonction $fg$**

$$fg : \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)\times g(x) \end{array} \right.$$

On écrit : $\forall x \in \mathcal{D}, \quad (fg)(x) = f(x)\times g(x).$

**Illustration**

Pour $f : x \longmapsto \mathrm{e}^x$ et $g : x \longmapsto x^2$ :

$$fg : x \longmapsto x^2\mathrm{e}^x$$

$\square$

**Application| [2640] | 2| Opérations sur les fonctions**

On considère $f : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2+1 \end{array} \right.$ et $g : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1-2x^2 \end{array} \right.$.

Expliciter les fonctions $f+g$, $f-g$, $2f+g$ et $fg$.

$\square$

**Définition 5 – Composition de fonctions**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$ telles que $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$.
On définit **la fonction composée de** $f$ **par** $g$, notée $g \circ f$, par :

$$g \circ f : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array} \right.$$

On écrit : $\quad \forall x \in \mathcal{D}_f, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}_f & f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g & \mathbb{R} \\ x \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & f(x) \arrow[r, mapsto, "g"] & g(f(x)) \end{tikzcd}$$

□

**Application| [2641] | 3| Composition de fonctions**

Soient $f : x \longmapsto \dfrac{x+1}{x}$ et $g : x \longmapsto \dfrac{1}{x+1}$.
Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$ ainsi que leur ensemble de définition.

□

# 5. Fonctions paires et impaires

**Contexte**

Dans tout ce qui suit, le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O\ ;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. On désigne par $f$ une fonction de la variable réelle d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$, et on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans ce repère.

□

**Définition 6 – Fonctions paires et impaires**

On dit que $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0 lorsque : $\quad \forall x \in \mathcal{D}_f,\ -x \in \mathcal{D}_f$.

**Foncton paire**

On dit que $f$ est paire lorsque :

| | |
|---|---|
| $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0 | $\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f(-x) = f(x)$ |

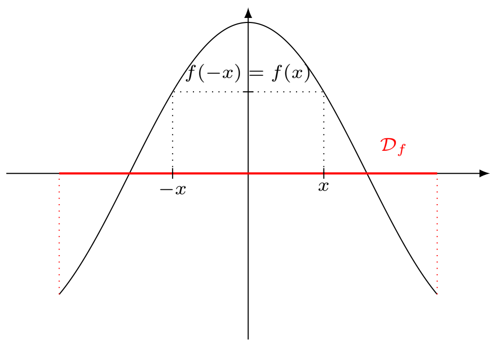
**Fonction impaire**

On dit que $f$ est impaire lorsque :

| | |
|---|---|
| $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0 | $\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f(-x) = -f(x)$ |

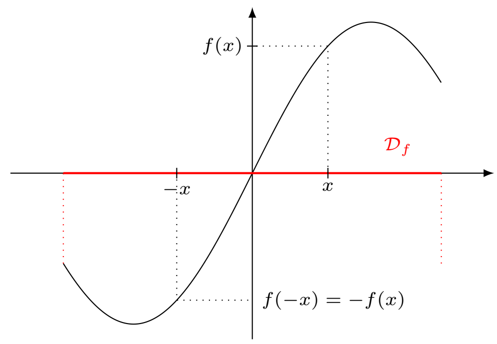
**Conséquences graphiques**

**Fonction paire**




$\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

**Fonction impaire**




$\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.

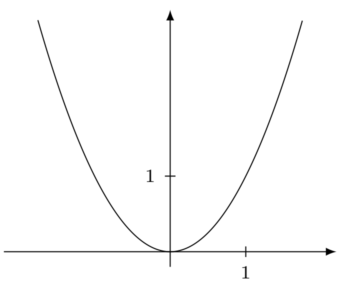
**Étudier une fonction paire et conséquences**

**Étudier la parité d'une fonction**, c'est vérifier si elle est paire, impaire, ou aucun des deux.

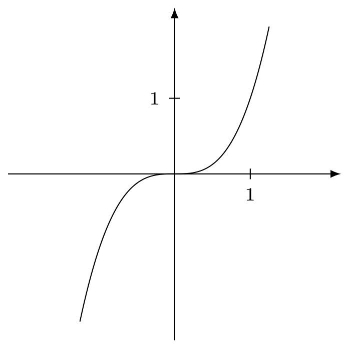
- On s'assure que $\mathcal{D}_f$ est bien symétrique par rapport à 0 ;
- Pour $x \in \mathcal{D}_f$, on calcule $f(-x)$ que l'on compare ensuite à $f(x)$.

Pour une fontion paire ou impaire, en écrivant que $\mathcal{D}_f = \underbrace{\mathcal{D}_f^-}_{\{x\in\mathcal{D}_f,\, x\leq 0\}} \cup \underbrace{\mathcal{D}_f^+}_{\{x\in\mathcal{D}_f,\, x\geq 0\}}$, la connaissance des variations de $f$ sur $\mathcal{D}_f^+$ suffit pour avoir les variations de $f$ sur $\mathcal{D}_f$ tout entier ! $\square$

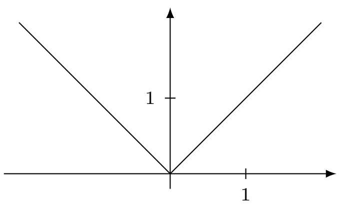
**Proposition 1 – Catalogue de fonctions paires ou impaires**



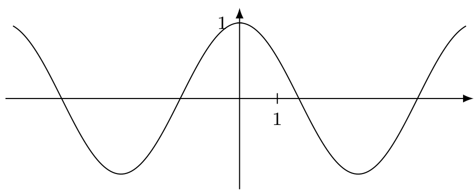

La fonction $x \longmapsto x^2$ est une fonction paire.



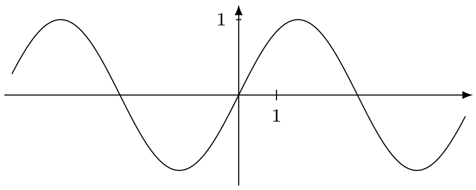

La fonction $x \longmapsto x^3$ est une fonction impaire.



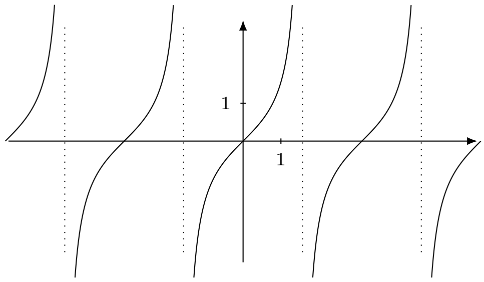

La fonction $x \longmapsto |x|$ est une fonction paire.




La fonction $x \longmapsto \cos(x)$ est une fonction paire.




La fonction $x \longmapsto \sin(x)$ est une fonction impaire.




La fonction $x \longmapsto \tan(x)$ est une fonction impaire.

□

**Application|** [2642] **| 4| Parité d'une fonction**

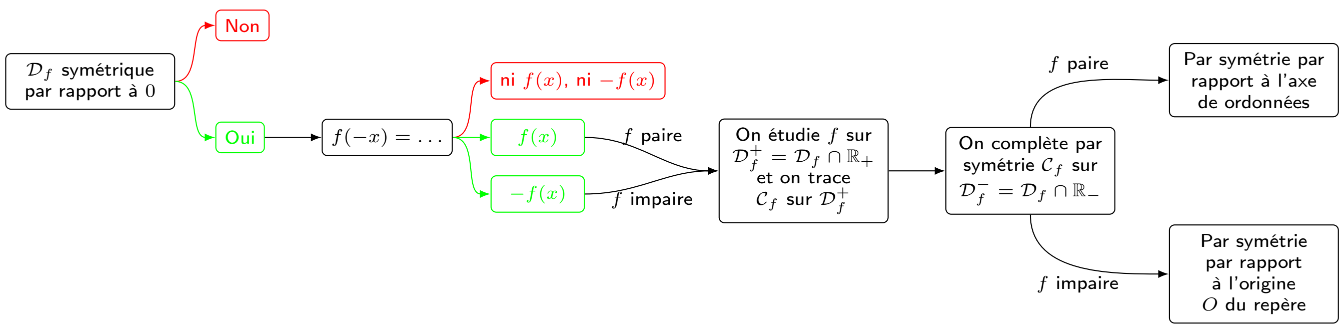
On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2} + \ln\left(x^2\right)$.

**(1).** Déterminer le domaine de définition de $f$.

**(2).** Étudier la parité de la fonction.

□

**Point méthode 1 – Plan détude d'une fonction paire ou impaire**




□

**Application| [1949] | 5| Fonction paire**

On donne ci-dessous le tableau de variation sur $[0;4]$ d'une fonction $f$ définie sur $[-4;4]$.

**(1).** Proposer une ébauche de la courbe représentative de $f$ sachant que $f$ est paire.

**(2).** Proposer une ébauche de la courbe représentative de $f$ sachant que $f$ est impaire.

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Variations de $f$ | $0$ | ↗ | $1$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $2$ |

☐

**Application| [2643] | 6| Fonctions paires/impaires**

$f$ et $g$ sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ où $f$ est une fonction paire, et $g$ est une fonction impaire. Que peut-on dire de la parité des fonctions $h$ dont l'expression est la suivante ?

**(1).** $h(x) = f(x)g(x)$ ☐ Paire ☐ Impaire ☐ Rien

**(2).** $h(x) = f(x)\cos(x)$ ☐ Paire ☐ Impaire ☐ Rien

**(3).** $h(x) = f(x) + x^2$ ☐ Paire ☐ Impaire ☐ Rien

**(4).** $h(x) = f(x)g(x)\sin(x)$ ☐ Paire ☐ Impaire ☐ Rien

**(5).** $h(x) = f(x)\mathrm{e}^{-x^2}$ ☐ Paire ☐ Impaire ☐ Rien

**(6).** $h(x) = g(x)\mathrm{e}^{x^2}$ ☐ Paire ☐ Impaire ☐ Rien

**(7).** $h(x) = x^2 f(x)g(x)\cos(x)$ ☐ Paire ☐ Impaire ☐ Rien

**(8).** $h(x) = |g(x)|$ ☐ Paire ☐ Impaire ☐ Rien

**(9).** $h(x) = f(g(x))$ ☐ Paire ☐ Impaire ☐ Rien

**(10).** $h(x) = g(f(x))$ ☐ Paire ☐ Impaire ☐ Rien

☐

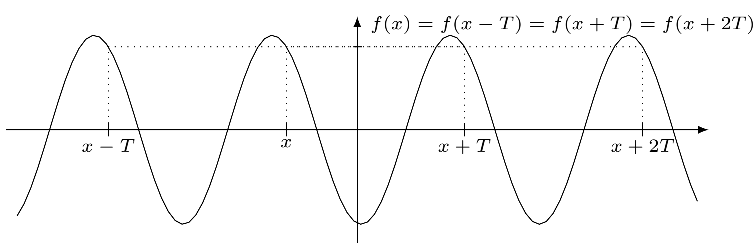
# 6 . Fonctions périodiques

**Définition 7 – Fonction de période $T$**

Soit $T$ un nombre réel. On dit quela **fonction $f$ est $T$−périodique** ou de **période $T$**, lorsque :

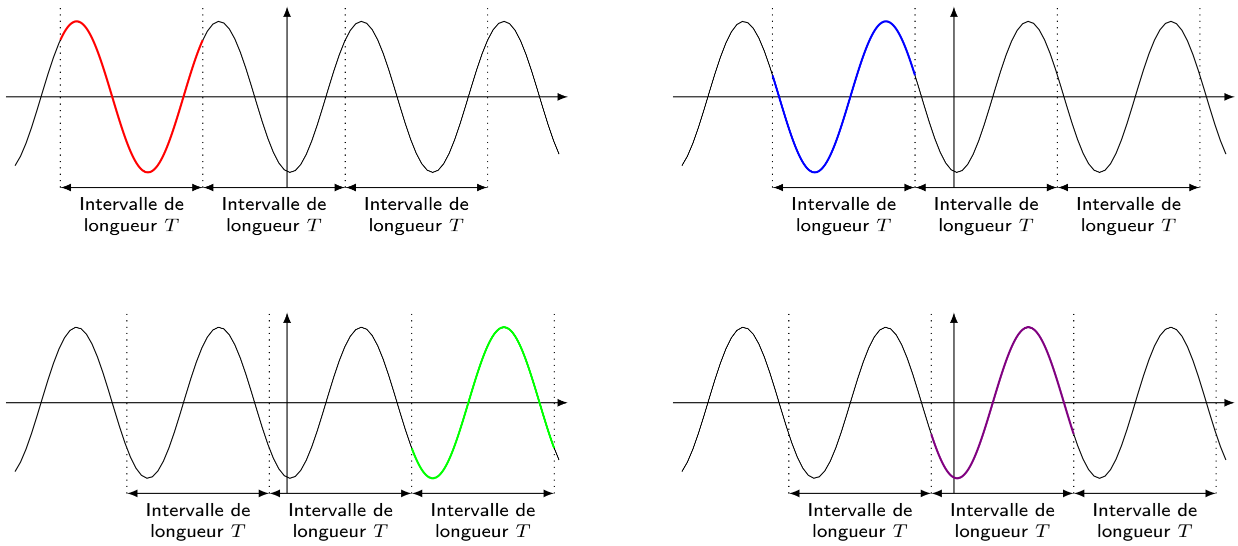
$$\forall x \in \mathcal{D}_f,\ x+T \in \mathcal{D}_f\ ;$$

$$\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(x+T) = f(x).$$




**Conséquences graphiques**

La représentation graphique $\mathcal{C}_f$ d'une telle fonction est **invariante** par la **translation** de vecteur $\begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix}$. On en déduit en particulier que la connaissance de $\mathcal{C}_f$ sur un intervalle de longueur $T$ suffit, par translations successives, pour obtenir $\mathcal{C}_f$ tout entière.




**Étudier la périodicité d'une fonction**

Pour montrer qu'une fonction $f$ est périodique :

- On conjecture une valeur $T$ pour la période ;
- On s'assure que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a $x + T \in \mathcal{D}_f$ ;
- Pour $x \in \mathcal{D}_f$, on calcule $f(x+T)$ que l'on compare ensuite à $f(x)$.

Pour une fonction périodique, la connaissance des variations de $f$ sur un intervalle de longueur $T$ suffit pour avoir les variations de $f$ sur $\mathcal{D}_f$ tout entier !

□

**Application| [1952] | 7| Fonctions périodiques**

$f$ est une fonction 2-périodique définie sur $\mathbb{R}$. Étudier la périodicité des fonctions $g$ et $h$ où :

$$g : x \longmapsto f(5x) \text{ et } h : x \longmapsto 3f(5x+3).$$

□

## Proposition 2 – Catalogue de fonctions périodiques de référence

### Fonctions cosinus et sinus

Les fonctions $x \longmapsto \cos(x)$ et $x \longmapsto \sin(x)$ sont $2\pi-$périodiques.

### Fonctions $x \longmapsto \cos(\omega x+\varphi)$ et $x \longmapsto \sin(\omega x+\varphi)$

Les fonctions $x \longmapsto \cos(\omega x+\varphi)$ et $x \longmapsto \sin(\omega x+\varphi)$ sont périodiques et de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

### Fonction tangente

La fonction $x \longmapsto \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ est $\pi-$périodique.

□

## Point méthode 2 – Plan d'étude d'une fonction $T-$périodique

On choisit un intervalle $I$ de longueur $T$ sur lequel on étudie les variations de $f$ en tenant compte des points où $f$ n'est pas définie

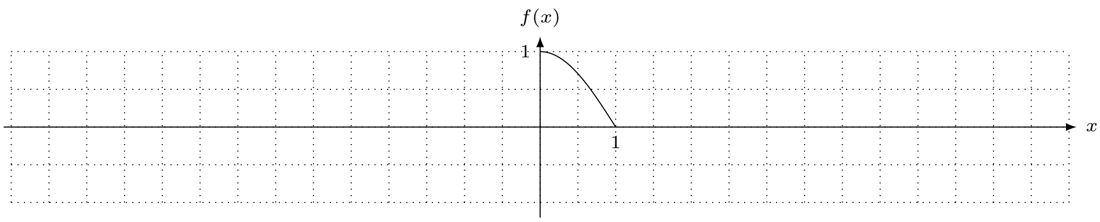
→ On construit la représentation graphique de $f$ sur l'intervalle $I$, que l'on appelle parfois **motif**

→ On complètera la représentation graphique en translatant ce motif par des translations de vecteur $k\vec{u}$ où $\vec{u}\begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix}$ et $k \in \mathbb{Z}$.

□

## Application| [1954] | 8| Fonctions périodiques

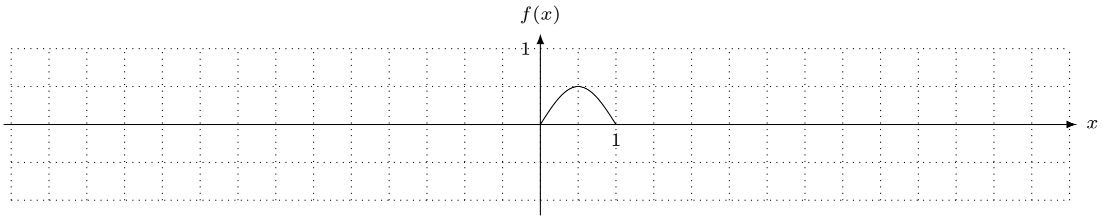
Compléter la représentation graphique de la fonction $f$ suivante, sachant qu'elle est définie sur $\mathbb{R}$, paire et 2-périodique.




□

**Application|[1955]| 9| Fonctions périodiques**

Compléter la représentation graphique de la fonction $f$ suivante, sachant qu'elle est définie sur $\mathbb{R}$, impaire et 2-périodique.



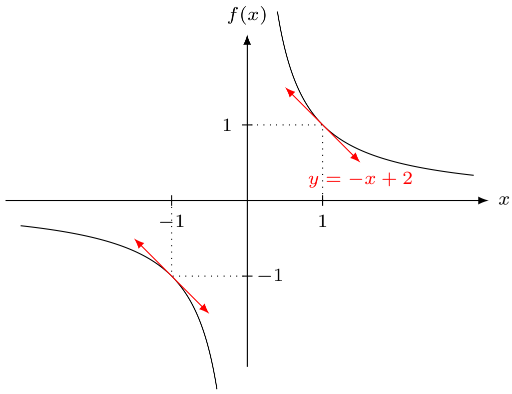

☐

## 7. Graphes et tableau de variation des fonctions de réferences

**Proposition 3 – Fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ - Fonction inverse**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Variations de $x \longmapsto \frac{1}{x}$ | $0$ ↘ $-\infty$ | | ‖ | | $+\infty$ ↘ $0$ |

La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ et est une fonction impaire.



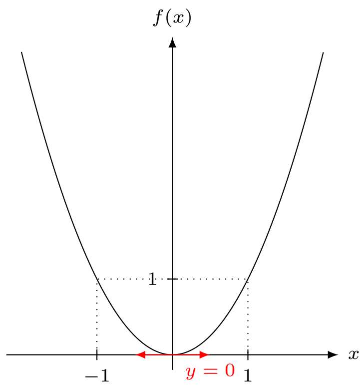

☐

**Proposition 4 – Fonction $x \longmapsto x^2$ et $x \longmapsto \sqrt{x}$**

Fonction carrée

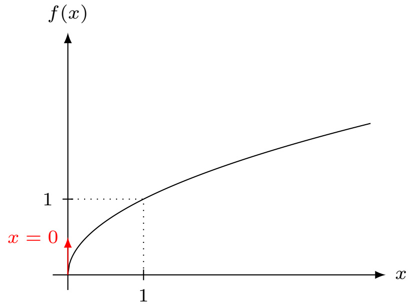
| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Variations de $x \longmapsto x^2$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

La fonction $x \longmapsto x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$ et est une fonction paire.



### Fonction racine carrée

| $x$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Variations de $x \longmapsto \sqrt{x}$ | $0$ ↗ | $1$ ↗ | $+\infty$ |




On rappelle que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$ et $\sqrt{x^2} = |x|$.

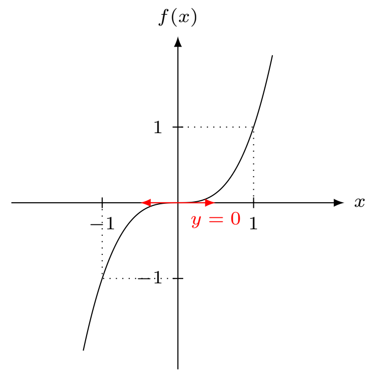
$\square$

**Proposition 5 – Fonction $x \longmapsto x^3$ et $x \longmapsto \sqrt[3]{x}$**

### Fonction cube

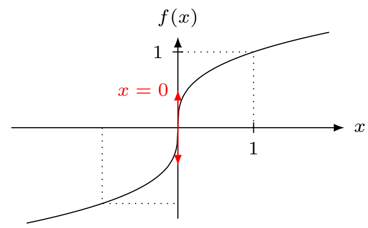
| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Variations de $x \longmapsto x^3$ | $-\infty$ ↗ | $0$ ↗ | $+\infty$ |

La fonction $x \longmapsto x^3$ est définie sur $\mathbb{R}$ et est une fonction impaire.




### Fonction racine cubique

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Variations de $x \longmapsto \sqrt[3]{x}$ | $-\infty$ ↗ | $0$ ↗ | $+\infty$ |



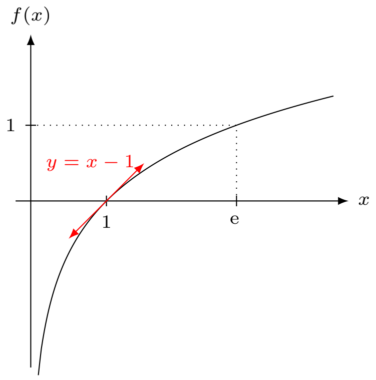

On rappelle que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x$ et $\sqrt[3]{x^3} = x$.

$\square$

**Proposition 6 – Fonction $x \longmapsto \ln(x)$ et $x \longmapsto \mathrm{e}^{x}$**

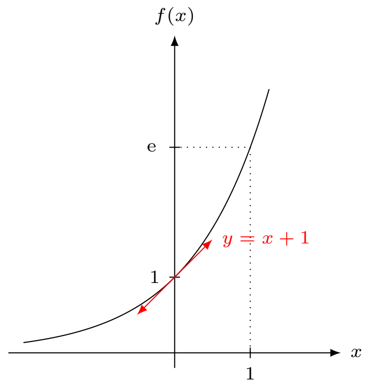
Fonction logarithme népérien

| $x$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Variations de $x \longmapsto \ln(x)$ | $-\infty$ ↗ | $0$ ↗ | $+\infty$ |




Fonction exponentielle

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Variations de $x \longmapsto \mathrm{e}^{x}$ | $0$ ↗ | $1$ ↗ | $+\infty$ |




On rappelle que : $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ \ln\left(\mathrm{e}^{x}\right) & = & x \\ \forall x \in \mathbb{R}_{+}^{*},\ \mathrm{e}^{\ln(x)} & = & x \end{cases}$

□