EN02

Manipuler les nombres réels

Version du 24-11-2022 à 14:24

1. Travailler avec une valeur absolue

Définition 1 – Valeur absolue

Valeur absolue de x pour $x \in \mathbb{R}$ | Notation $|x|$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

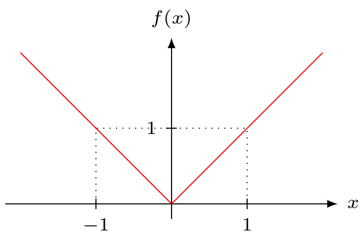
Exemple

$|2| = \ldots$ $\quad |-3| = \ldots$ $\quad |\sqrt{2} - 1| = \ldots$

$|2 - \sqrt{2}| = \ldots$ $\quad |\sqrt{3} - 2| = \ldots$ $\quad |\mathrm{e}^{-2}| = \ldots$

Fonction valeur absolue

$$|\bullet| : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array}\right.$$



Propriétés immédiates

$\forall x \in \mathbb{R},\ x \leq |x|$

$\forall x \in \mathbb{R},\ |x| \geq 0$

$\forall x \in \mathbb{R},\ |x| = |-x|$

$(\,|x| = 0\,) \Leftrightarrow (\,x = 0\,)$

$\square$

Application| [2463] | 1| Manipuler la définition de la valeur absolue d'un réel

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

$\left|1 - \sqrt{2}\right| = 1 - \sqrt{2}$

$\left|1 - \sqrt{2}\right| = 1 + \sqrt{2}$

$\left|1 - \sqrt{2}\right| = \sqrt{2} - 1$

$\left|1 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{3}} - 1$

$\left|1 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right| = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\left|1 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right| = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{3}$

$\square$

Théorème 1 – Opérations sur les valeurs absolues | x et y réels

$$|x \times y| = |x| \times |y|$$

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \text{ si } y \neq 0$$

Égalité entre deux valeurs absolues

$$|x| = |y| \quad \Leftrightarrow \quad (x = y \text{ ou } x = -y)$$

Inégalité triangulaire

$$||x| - |y|| \leq \underbrace{|x + y| \leq |x| + |y|}_{\text{Inégalité triangulaire}}$$

Valeur absolue et intervalle

Pour $a \geq 0$

$$(|x| \leq a) \quad \Leftrightarrow \quad (x \in [-a; a]) \quad \Leftrightarrow \quad (-a \leq x \leq a)$$

Pour $a \in \mathbb{R}$ et $b \geq 0$

$$(|x - a| \leq b) \quad \Leftrightarrow \quad (-b \leq x - a \leq b) \quad \Leftrightarrow \quad (a - b \leq x \leq b + a)$$

□

Application| [2465] | 2| Valeur absolue d'un produit

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|\mathrm{e}^{x}\left(x^2 + 1\right)\right| = \mathrm{e}^{x}\left(x^2 + 1\right)$.

□

Point méthode 1 – Résolution d'une équation du type $|A(x)| = |B(x)|$

On résout une telle équation en remarquant que : $|A(x)| = |B(x)| \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} A(x) = B(x) \\ \quad \text{ou} \\ A(x) = -B(x) \end{array}\right.$.

□

Application| [2466] | 3| Équations et valeur absolue

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$(E_1) : \quad |x + 3| = |5 - 2x|$

$(E_3) : \quad |2x - 4| = |x + 2|$

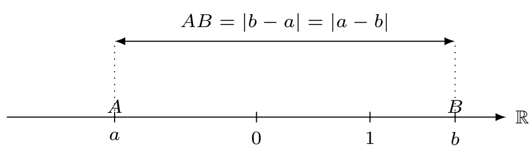
$(E_2) : \quad |x + 12| = \left|x^2 - 8\right|$

□

Proposition 1 – Distance entre deux points sur la droite réelle

Soient a et b deux réels.
On considère les points A et B d'abscisses respectives a et b sur la droite réelle d'origine O et d'unité 1.

La distance AB est égale à $|a - b| = |b - a|$.



□

2. Ordre dans $\mathbb{R}$

Proposition 2 – Ordre et opérations | Pour $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ et $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$

Si pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, $u_k \leq v_k$,

alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \leq \sum_{k=1}^{n} v_k$

Visualisation

$$\begin{array}{rcl} u_1 & \leq & v_1 \\ u_2 & \leq & v_2 \\ & \vdots & \\ u_n & \leq & v_n \\ \hline u_1 + u_2 + \ldots + u_n & \leq & v_1 + v_2 + \ldots v_n \end{array}$$

Éléments de preuve

$$\begin{array}{lrcl} & u_1 & \leq & v_1 \\ & u_1 + u_2 & \leq & v_1 + \underbrace{u_2}_{\leq v_2} \\ \text{donc} & u_1 + u_2 & \leq & v_1 + v_2 \end{array}$$

Si pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, $0 \leq u_k \leq v_k$

alors $\displaystyle 0 \leq \prod_{k=1}^{n} u_k \leq \prod_{k=1}^{n} v_k$

Visualisation

$$\begin{array}{rcccl} 0 & \leq & u_1 & \leq & v_1 \\ 0 & \leq & u_2 & \leq & v_2 \\ & & & \vdots & \\ 0 & \leq & u_n & \leq & v_n \\ \hline 0 & \leq & u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n & \leq & v_1 \times v_2 \times \ldots v_n \end{array}$$

Éléments de preuve

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \leq & u_1 & \leq & v_1 \\ 0 \times \underbrace{u_2}_{\geq 0} & \leq & u_1 \times \underbrace{u_2}_{\geq 0} & \leq & u_1 \times \underbrace{\underbrace{u_2}_{\geq 0}}_{\leq v_2} \\ 0 & \leq & u_1 \times u_2 & \leq & v_1 \times v_2 \end{array}$$

Inégalité triangulaire généralisée

$$\left| \sum_{k=1}^{n} u_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |u_k|$$

$$\underbrace{|u_1 + u_2 + \ldots + u_n|}_{\text{La valeur absolue d'une somme est...}} \leq \underbrace{|u_1| + |u_2| + \ldots |u_n|}_{\text{...inférieure à la somme des valeurs absolues}}$$

□

Application| [3083] | 4| Établir une inégalité

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\quad x + \dfrac{1}{x} \geq 2$.

En déduire : $\quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}_+^*, \quad (x + y)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right) \geq 4$.

□

Application| [3084] | 5| Obtention d'un encadrement d'une somme

On admet que : $\quad \forall k \in [\![n + 1; 2n]\!], \quad \dfrac{1}{2n} \leq \dfrac{1}{k} \leq \dfrac{1}{n + 1} \quad (\star)$.

À l'aide de cette inégalité, donner un encadrement de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

□

3. Majorant et minorant d'une partie de $\mathbb{R}$

Définition 2 – Majorant et minorant

Soit $A \subset \mathbb{R}$. On rappelle les définitions suivantes :

Un **majorant** de A, lorsqu'il existe, est un réel M tel que :

$$\forall x \in A, \quad x \leq M$$

On dit dans ce cas que A est **majoré** par M.

Le **maximum** de A, lorsqu'il existe, est le réel $a \in A$ noté $\max(A)$ tel que :

$$\forall x \in A, \quad x \leq a$$

Un **minorant** de A, lorsqu'il existe, est un réel m tel que :

$$\forall x \in A, \quad x \geq m$$

On dit dans ce cas que A est **minoré** par m.

Le **minimum** de A, lorsqu'il existe, est le réel $b \in A$ noté $\min(A)$ tel que :

$$\forall x \in A, \quad x \geq b$$

Lorsque A est minoré et majoré, on dit que A est **borné**.

Autre terminologie

On parle parfois de « plus grand élément » ou de « plus petit élément » pour désigner respectivement maximum et minimum.

□

Application| [3085] | 6| Majorant et minorant d'ensembles

Les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants sont-ils minorés ? majorés ? admettent-ils un maximum ? un minimum ?

$A_1 =]-\infty; 1[$ $\qquad$ $A_2 =]-\infty; 1]$ $\qquad$ $A_3 =]-3; +\infty[$ $\qquad$ $A_4 = [-3; +\infty[$

□

Application| [1994] | 7| Maximum et minimum

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $\max(a, b) = \dfrac{a+b+|a-b|}{2}$ et $\min(a, b) = \dfrac{a+b-|a-b|}{2}$.

□

Définition 3 – Borne supérieure et inférieure | Pour A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$

On appelle **borne supérieure de** A et on note $\sup(A)$ lorsqu'elle existe, le plus petit des majorants de A.

On appelle **borne inférieure de** A et on note $\inf(A)$ lorsqu'elle existe, le plus grand des minorants de A.

□

Théorème 2 – Existence de bornes supérieure ou inférieure

Tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ non vide et majoré admet une borne supérieure.

Tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ non vide et minoré admet une borne inférieure.

□

Proposition 3 – Lien avec majorant/minorant

A admet un maximum si, et seulement si, sa borne supérieure appartient à A.

A admet un minimum si, et seulement si, sa borne inférieure appartient à A.

□

Application| [3086] | 8| Recherche de borne inférieure ou supérieure

$I_1 =]-\infty;1[$ et $I_2 =]-\infty;1]$ ont-ils une borne supérieure ? inférieure ?

□

Application| [3087] | 9| Borne supérieure pour une fonction

Soit $f : \left| \begin{array}{ccl} [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x \text{ si } x \in [0;1[\\ 0 \text{ si } x = 1 \end{cases} \end{array} \right.$. Déterminer $\sup\left(f\left([0;1]\right)\right)$.

□

Application| [1991] | 10| Bornes supérieurs

Pour $f : x \longmapsto 3x$ et $g : x \longmapsto 1-2x$, déterminer sur $I = [0;1]$ les bornes supérieurs et inférieures des fonctions f, g et $f+g$. Que peut-on observer ?

□

Application| [1993] | 11| Bornes supérieures

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{x^2+n^2} \end{array} \right.$. Calculer $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} f_n(x)$.

□

Application| [1995] | 12| Bornes supérieures et inférieures

Déterminer, si elles existent, les bornes supérieure et inférieure des ensembles suivants :

$\{1+n, n \in \mathbb{N}\}$

$\left\{1+\dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$

$\left\{(-1)^n+\dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$

$\left\{1+\dfrac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$

□