EN01

Vocabulaire des ensembles et des applications

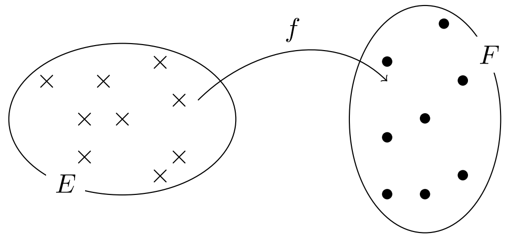
Version du 24-11-2022 à 13:29

1. Autour des applications

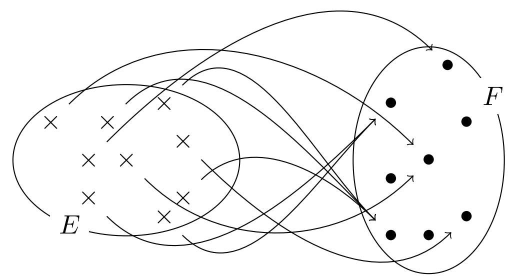
Définition 1 – Application et vocabulaire associé

Soient E et F deux ensembles, et f est une application que E dans F que l'on note : $f : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$.

On dit communément que E est l'ensemble de **départ** et F l'ensemble d'**arrivée**.

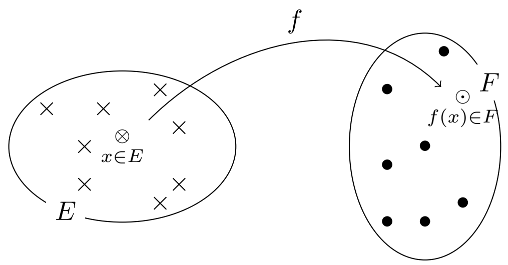


L'application f consiste à construire à partir d'un élément de E, un élément de F.



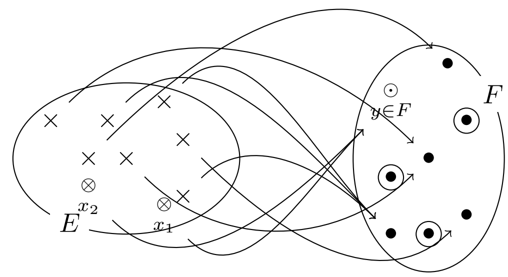
L'application f envoie un élément de E sur un élément de F.

Tous les éléments de E ont une image par f.



Ainsi, pour $x \in E$, on dit que $f(x)$ est l'**image** de x par f.

Tous les éléments de F ne sont pas toujours l'image d'un élément de E par f.



Ainsi, si $y \in F$ est tel qu'il existe (au moins) $x \in E$ tel que $y = f(x)$, on dit que x est un **antécédent** de y.

□

Contexte

Dans tout ce qui suit, et sauf mention contraire, E et F désigneront deux ensembles, et $f : E \longrightarrow F$ une application de E dans F, c'est à dire $f : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$.

□

Définition 2 – Ensemble $E \times F$ et extension à n ensembles

On désigne par $E \times F$ l'ensemble : $$E \times F = \{(x, y)\,,\ x \in E,\ y \in F\}$$

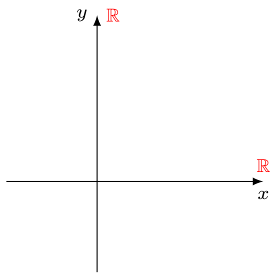
On parle alors de **produit cartésien** de deux ensembles.
On peut généraliser cette définition pour définir le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ de n ensembles $E_1, \ldots, E_n$:

$$E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n = \{(x_1, \ldots, x_n)\,,\ x_1 \in E_1,\ x_2 \in E_2,\ \ldots,\ x_n \in E_n\}.$$

Retour sur quelques ensembles $\mathbb{R}^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$

On remarquera que : $$\begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & = & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ \mathbb{R}^3 & = & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbb{R}^n & = & \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ ensembles}} \end{array}$$

On retrouve dans la dénomination et la notion de **repère cartésien** du plan (ou de l'espace) cette idée de produit cartésien d'ensembles :



□

On aimerait pouvoir écrire par exemple que $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ ou que $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, mais ce n'est pas si simple...
En effet en utilisant la définition du produit cartésien d'ensemble $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \{((x, y), z)\ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ z \in \mathbb{R}\}$ qui n'est pas « directement » $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)\,,\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R}\}$ même s'il est possible de faire le lien (voir plus tard).

Définition 3 – Graphe d'une application

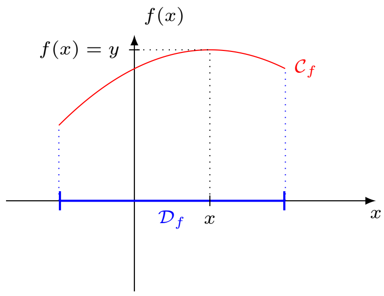
Le **graphe de** f est le sous-ensemble $\mathcal{G}_f$ de $E \times F$ défini par : $$\begin{array}{rcl} \mathcal{G}_f & = & \{(x, y) \in E \times F,\ y = f(x)\} \\ & = & \{(x, f(x))\,,\ x \in E\} \end{array}$$

C'est donc un sous-ensemble du produit cartésien $E \times F$.

Cas d'une fonction numérique

Pour $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$ une **fonction numérique**, la représentation graphique de f dans un repère du plan est l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$ où x décrit l'ensemble $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$.

En fait, $\mathcal{G}_f$ ainsi défini est un sous-ensemble de $\mathcal{D}_f \times \mathbb{R}$ qui est représenté par la courbe $\mathcal{C}_f$ dans le plan.



□

Définition 4 – Image directe et réciproque

Soit $A \subset E$ et $B \subset F$.

Image directe de A par f

$$\begin{array}{rcl} f(A) & = & \{y \in F,\, \exists x \in A,\, f(x) = y\} \\ & = & \{f(x),\, x \in A\} \\ & \subset & F \end{array}$$

Illustration pour une fonction numérique

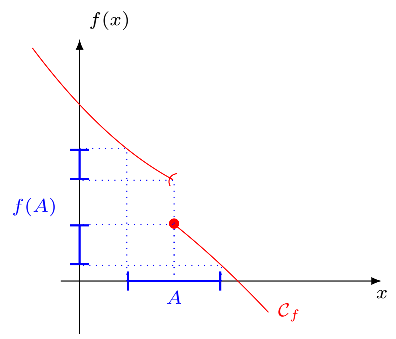
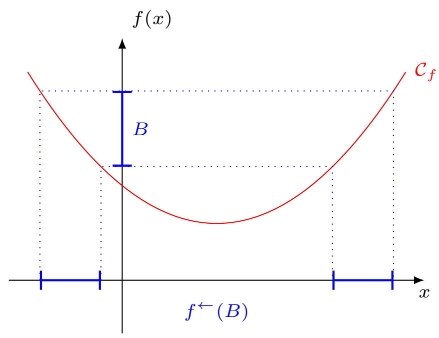


Image réciproque de B par f

$$\begin{array}{rcl} f^{\leftarrow}(B) & = & \{x \in E,\, f(x) \in B\} \\ & \subset & E \end{array}$$

Illustration pour une fonction numérique



□

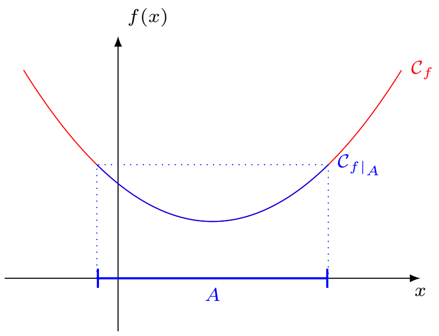
Définition 5 – Restriction, identité, composée

Restriction

Soit $A \subset E$.
On appelle **restriction de f à A** l'application :

$$f_{|A} : \left| \begin{array}{ccl} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f_{|A}(x) = f(x) \end{array} \right.$$

Illustration pour une fonction numérique



Identité

On appelle **identité de E** l'application :

$$\mathrm{Id}_E : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$$

Composition

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications où E, F et G sont trois ensembles.
On définit la **composée de f par g** par :

$$g \circ f : \left| \begin{array}{ccl} E & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & g \circ f(x) = g\left(f(x)\right) \end{array} \right.$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & F \arrow[r, "g"] & G \\ x \arrow[r, mapsto] \arrow[rr, mapsto, bend right, "g \circ f(x) = g\left(f(x)\right)"'] & f(x) \arrow[r, mapsto] & g\left(f(x)\right) \end{tikzcd}$$

□

2. Injection, surjection et bijection

Contexte

Dans tout ce qui suit, sauf mention contraire, E et F désigneront deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application de E dans F.

□

Définition 6 – Injection et surjection

Injection

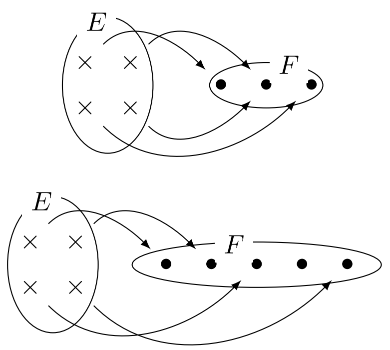
On dit que f est une **injection de** E **dans** F ou que f **est injective (sur** E**)** quand tout élément de F a au plus un antécédent par l'application f.

Formalisation

$$\forall\,(x, x') \in E \times E,\ f(x) = f(x') \Rightarrow\ x = x'$$

Deux éléments différents de E ont des images différentes par f.

Illustration



Surjection

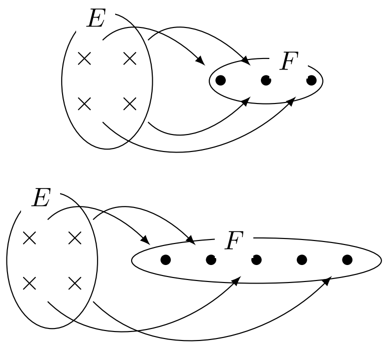
On dit que f est une **surjection de** E **dans** F ou que f **est surjective (dans** F**)** quand tout élément de F a au moins un antécédent par l'application f.

Formalisation

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ f(x) = y$$

Tout élément de F est l'image d'un élément de E par f.

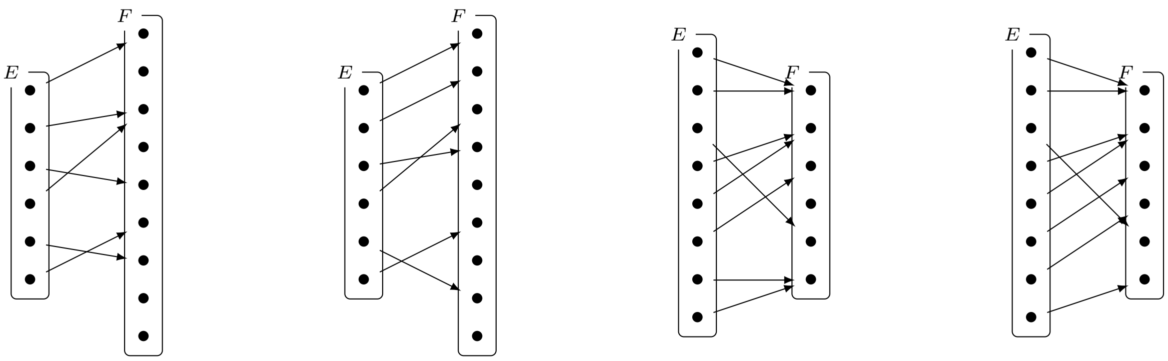
Illustration



□

Application| [3074] | 1| Injection et surjection

Parmi les applications $f : E \longrightarrow F$ représentées à l'aide des diagrammes suivants, lesquelles sont injectives ? surjectives ?

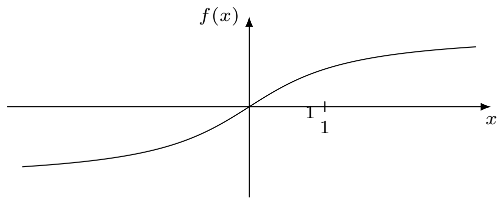


□

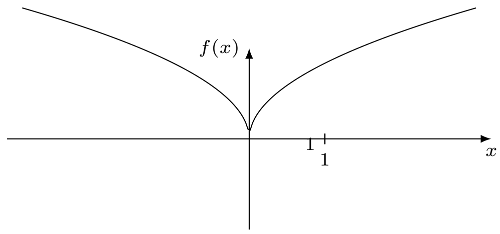
Application| [3075] | **2**| **Injectivité et surjectivité d'une fonction numérique**

On donne ci-après la représentation graphique de fonctions numériques f toutes définies sur $\mathbb{R}$.

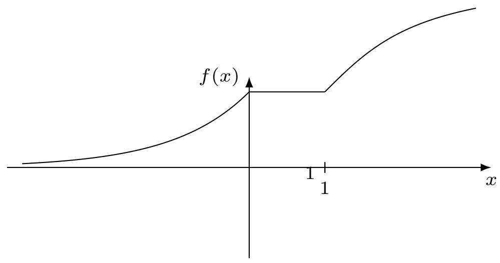
Dans le cas où $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, f est-elle injective ? surjective ?
Même question si $f : \mathbb{R} \longrightarrow]-1;1[$?



Dans le cas où $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, f est-elle injective ? surjective ?
Même question si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$?



Dans le cas où $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, f est-elle injetive ? surjective ?
Même question si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$?



□

Proposition 1 – Fonctions numériques injectives

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle I.
On sait alors que $f : I \longrightarrow f(I)$ où $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. Ainsi :

f est **injective** sur I si, et seulement si, f est **strictement monotone** sur I

□

Définition 7 – Bijection et notation f^{-1}

On dit que f est une **bijection de E dans F** ou f **est bijective**, quand elle est à la fois injective et surjective, c'est à dire quand tout élément de F a un et seul antécédent par f.

Formalisation

$$\forall y \in F, \exists! x \in E, \ f(x) = y$$

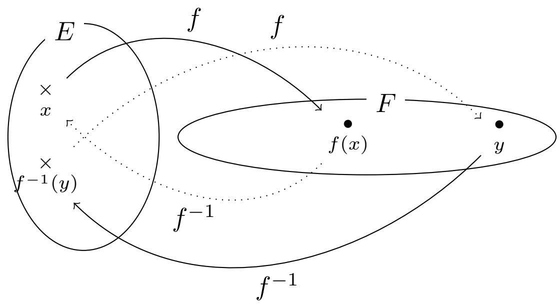
Application réciproque

Lorsque c'est le cas, il existe une application

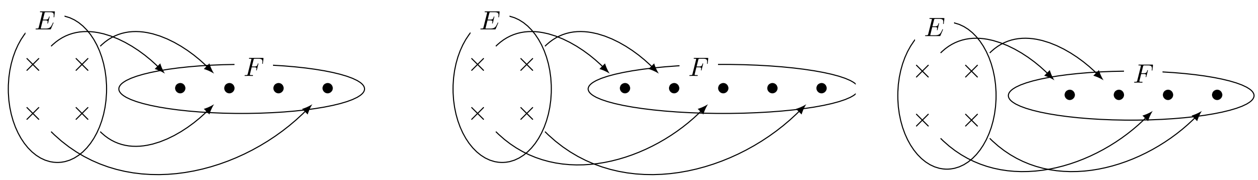
$$f^{-1} : \left| \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ y & \longmapsto & f^{-1}(y) \end{array} \right.$$

telle que :

$$\begin{array}{ll} \forall x \in E, & f^{-1}\left(f(x)\right) = x \\ \forall y \in F, & f\left(f^{-1}(y)\right) = y \end{array}$$



Illustration



□

3. Opérations sur les ensembles

Contexte

Dans tout ce qui suit, E et F désigneront deux ensembles, et A, B et C seront des sous-ensemble de E.

□

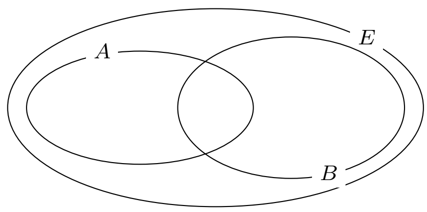
Définition 8 – Réunion ou union de A et B

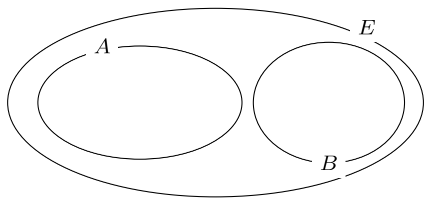
Ensemble des éléments de E qui appartiennent à A ou à B.

$$\begin{array}{rcl} A \cup B & = & \{x \in E, \ x \in A \textbf{ ou } x \in B\} \\ & = & \{x \in E : \ x \in A \vee x \in B\} \end{array}$$

Description en compréhension

□

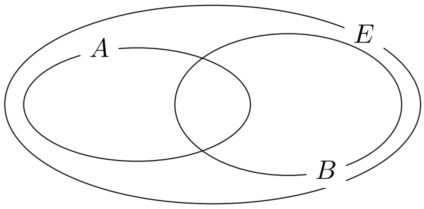




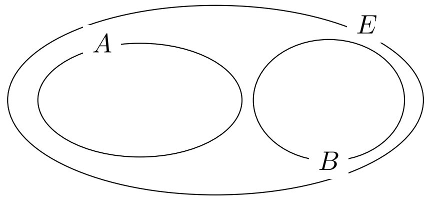
Définition 9 – Intersection de A et B

Ensemble des éléments de E qui appartiennent à A et à B.

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{x,\, x \in A \textbf{ et } x \in B\} \\ &= \underbrace{\{x \in E : x \in A \wedge x \in B\}}_{\text{Description en compréhension}} \end{aligned}$$



Si $A \cap B = \varnothing$, on dit que A **et** B **sont disjoints**.

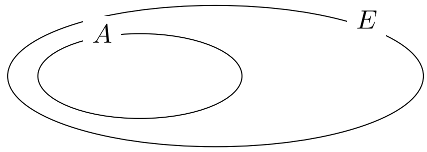


Définition 10 – Complémentaire de A

Ensemble des éléments de E qui n'appartient pas à A :

$$\underbrace{\overline{A} = \{x \in E,\, x \notin A\}}_{\text{Description en compréhension}}$$

et on note parfois $\overline{A}^E$ ou $E \setminus A$, ou encore $\complement_E A$.



Proposition 2 – Opérations avec $\cap$ et $\cup$

Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un même ensemble E :

$$\boxed{A \cup B = B \cup A} \quad \boxed{A \cap B = B \cap A} \quad \boxed{A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C}$$

$$\boxed{A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C} \quad \boxed{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)} \quad \boxed{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$$

Proposition 3 – Opérations sur le complémentaire

Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un même ensemble E :

$$\complement_E\left(\complement_E A\right) = A$$

$$\overline{\overline{A}} = A$$

$$A \subset B \Leftrightarrow \complement_E B \subset \complement_E A$$

$$A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$$

$$\complement_E(A \cup B) = (\complement_E A) \cap (\complement_E B)$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\complement_E(A \cap B) = (\complement_E A) \cup (\complement_E B)$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

4. Opérations sur les cardinaux

Définition 11 – Cardinal d'un ensemble fini | Définition « intuitive »

Soit E un ensemble fini.
On appelle **cardinal de** E, et on le note $\mathrm{card}(E)$ ou encore $\#E$ ou $|E|$, le **nombre de ses éléments**.
Par convention, $\mathrm{card}(\varnothing) = 0$.

☐

Contexte

Dans la suite de ce paragraphe, E et F désignent deux ensembles finis, et A et B sont deux sous-ensembles de E.

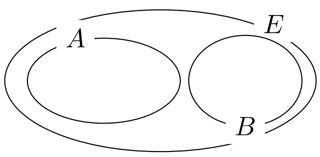
☐

Théorème 1 – Cardinal d'une union et d'une intersection

Les ensembles $A \cup B$ et $A \cap B$ sont des **ensembles finis**.

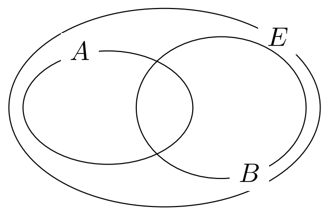
Lorsque A et B sont disjoints, on a en fait :

$$A \cap B = \varnothing \implies \mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B)$$



Dans le cas contraire, leurs cardinaux sont liés par la relation :

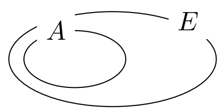
$$\mathrm{card}(A \cup B) + \mathrm{card}(A \cap B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B)$$



☐

Théorème 2 – Cardinal du complémentaire

$\complement_E A$ est fini et : $\mathrm{card}(E) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}\left(\overline{A}\right)$

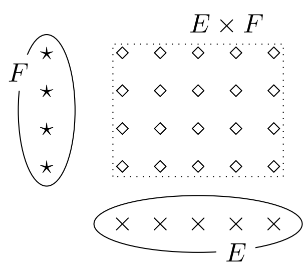


☐

Théorème 3 – Cardinal d'un produit cartésien

Si E et F sont **finis**, alors $E \times F$ est **fini**, et on a :

$$\mathrm{card}(E \times F) = \mathrm{card}(E) \times \mathrm{card}(F)$$



☐

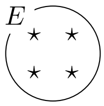
5. Cardinal de $\mathcal{P}(E)$

Définition 12 – Ensemble des parties de E

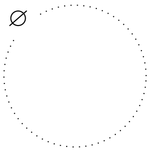
On désigne par $\mathcal{P}(E)$ **l'ensemble des parties de** E, c'est à dire : $\mathcal{P}(E) = \{E', E' \subset E\}$

□

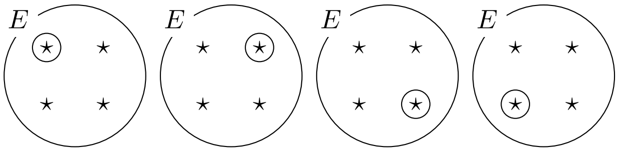
Exemple 1 – Illustration de $\mathcal{P}(E)$ pour un ensemble à 4 éléments

On considère un ensemble E à quatre éléments représenté par le schéma suivant : 

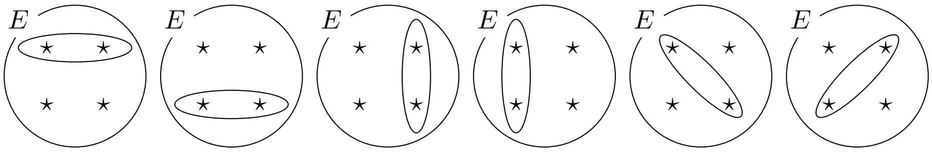
- Il y a 1 seul sous-ensemble de E qui ne contient aucun élément de E : c'est $\varnothing$.



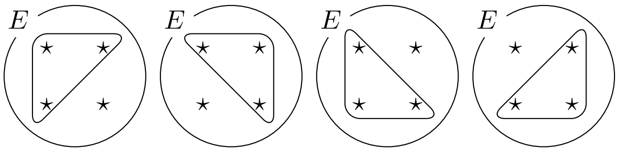
- Il y a 4 sous-ensembles de E qui contiennent 1 seul élément de E :



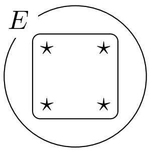
- Il y a 6 sous-ensembles de E qui contiennent 2 éléments de E :



- Il y a 4 sous-ensembles de E qui contiennent 3 éléments de E :



- Il y a 1 seul sous-ensembles de E qui contiennent 4 éléments de E :



□

Théorème 4 – Cardinal de $\mathcal{P}(E)$

Si E est **fini**, alors $\mathcal{P}(E)$ est **fini**, et on a :

$$\mathrm{card}\left(\mathcal{P}(E)\right) = 2^{\mathrm{card}(E)}$$

□