CL03

Complexes et trigonométrie

Version du 25-11-2022 à 10:28

Contexte

Dans tout ce qui suit, sauf mention contraire, $z = a + \mathrm{i}\, b$ et $z' = a' + \mathrm{i}\, b'$ désigneront deux complexes écrits sous forme algébrique avec $(a, b, a', b') \in \mathbb{R}^4$, et le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = \left(O\ ;\ \vec{u}\ ,\ \vec{v}\right)$.

□

1 . Module d'un nombre complexe

Définition 1 – Module d'un nombre complexe

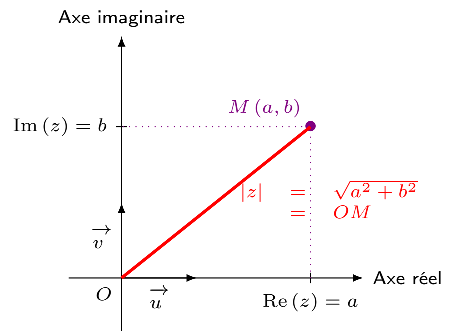
Module de z | Notation $|z|$ | Pour $z = a + \mathrm{i}\, b$

$$|z| = \sqrt{z \times \overline{z}} \qquad |z|^2 = z \times \overline{z} \qquad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Exemples

$$\begin{aligned} |1| &= |1 + 0\mathrm{i}\,| \\ &= \sqrt{1^2 + 0^2} \\ &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} |\mathrm{i}\,| &= |0 + 1\mathrm{i}\,| \\ &= \sqrt{0^2 + 1^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |1 + 2\mathrm{i}\,| &= \sqrt{1^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{5} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} |2 - \mathrm{i}\,| &= \sqrt{2^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$$



Conséquences immédiates

$$(\,|z| = 0\,) \quad \Leftrightarrow \quad (\,z = 0\,)$$

On parle du caractère homogène du module.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$: $\qquad |z| = |-z| = |\overline{z}| = |-\overline{z}|$

Éléments de preuve:
Il suffit de l'écrire. . .

□

Théorème 1 – Inégalité triangulaire

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |\mathrm{Re}\,(z)| \leq |z| \text{ et } |\mathrm{Im}\,(z)| \leq |z|$$

$$\forall\,(z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

Inégalité triangulaire

□

Théorème 2 – Compatibilité avec le produit et le quotient

$\lvert z \times z' \rvert = \lvert z \rvert \times \lvert z' \rvert$	$\lvert z^n \rvert = \lvert z \rvert^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$	$\left\lvert \dfrac{1}{z'} \right\rvert = \dfrac{1}{\lvert z' \rvert}$ $z' \neq 0$	$\left\lvert \dfrac{z}{z'} \right\rvert = \dfrac{\lvert z \rvert}{\lvert z' \rvert}$ $z' \neq 0$

Application| [2871] | 1| Exemples de calculs de modules

Déterminer le module des complexes suivants :

$z_1 = (1+\mathrm{i})(2-2\mathrm{i})$;	$z_2 = (2-2\mathrm{i})^4$;	$z_3 = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2-2\mathrm{i}}$.

2. Complexes de module 1

Définition 2 – Notation $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

Complexe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ | $\theta \in \mathbb{R}$

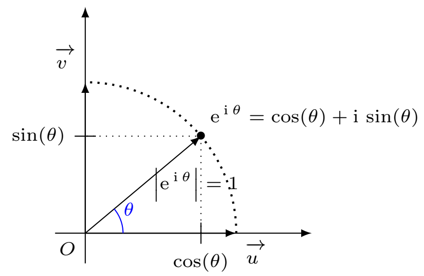
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$$

Module de $\mathrm{e}^{ic\theta}$

$$\left\lvert \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \right\rvert = 1$$

Exemples

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}0} = 1$	$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}$	$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$	$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = -\mathrm{i}$



Théorème 3 – Ensemble $\mathbb{U}$

On désigne par $\mathbb{U}$ l'**ensemble des complexes de module 1** et on a : $\mathbb{U} = \left\{ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\ \theta \in \mathbb{R} \right\}$

Théorème 4 – Relation fondamentale et conséquences | Pour θ et θ' réels et $n \in \mathbb{Z}$

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}$ Relation fondamentale	$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$ pour $n \in \mathbb{Z}$	$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$	$\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\theta')}$

Application| [2872] | 2| Travailler avec « $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ »

Simplifier l'écriture du complexe $z = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^6}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}$.

3. Formules d'Euler et de Moivre et applications

Théorème 5 – Formules d'Euler et de Moivre | $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$

Formules d'Euler

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Formule de Moivre

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$$

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

□

Point méthode 1 – Linéarisation d'une expression trigonométrique

Linéariser une expression trigonométrique c'est transformer les expressions du type $\cos^n(x)$ et $\sin^p(x)$, en des combinaisons linéaires de termes de la forme $\cos(\alpha x)$ et $\sin(\beta x)$. Pour cela :

- les **formules d'Euler** donnent : $\cos^n(\theta) = \dfrac{\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)^n}{2^n}$ et $\sin^p(\theta) = \dfrac{\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)^p}{(2i)^p}$.
- on utilise la **formule du binôme** pour développer $\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)^n$ et $\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)^p$.
- on obtient des termes tels $K\left(e^{i\alpha\theta} \pm e^{-i\alpha\theta}\right)$ que l'on transforme en cosinus/sinus par les formules d'Euler.

□

Application| [2874] | 3| Linéarisation et primitivation

(1). Linéariser l'expression $\sin^3(x)$

(2). En déduire les primitives sur $\mathbb{R}$ de $f : x \longmapsto \sin^3(x)$.

□

4. Arguments d'un nombre complexe

Théorème 6 – Forme exponentielle d'un complexe

Normalisation d'un complexe | $z \in \mathbb{C}^*$

Le complexe $\dfrac{z}{|z|}$ est de module 1.

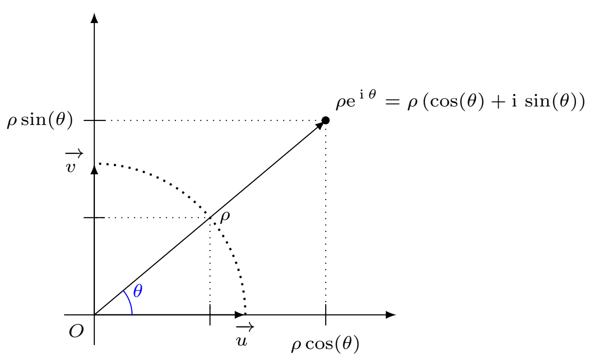
Il existe $\theta \in \mathbb{R}$, $\dfrac{z}{|z|} = e^{i\theta}$.

Écriture exponentielle | $z \in \mathbb{C}^*$

$$z = |z|\,e^{i\theta}$$

Arguments d'un complexe et forme trigonométrique

Pour $z \in \mathbb{C}^*$, le réel θ ainsi défini est appelé **UN argument** de z.



Non unicité de l'écriture exponentielle

Une **telle écriture n'est pas unique** : $\underset{\text{avec } \rho_1>0,\, \rho_2>0,\, (\theta_1,\theta_2)\in\mathbb{R}^2}{\rho_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta_1} = \rho_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta_2}} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho_1 = \rho_2 \\ \theta_1 = \theta_2 + k \times 2\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

On parle toutefois de la **mesure principale θ d'un argument de** z lorsque $\theta = \in]-\pi;\pi]$.

□

Application| [2877] | 4| Forme trigonométrique d'un complexe

Mettre sous forme trigonométrique les complexes :

$-4 + 4\mathrm{i}$	$\sqrt{3} + 3\mathrm{i}$	$1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$	$1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$

□

Proposition 1 – Manipuler les arguments | z et z' complexes non nuls

$\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z') + k \times 2\pi$	$k \in \mathbb{Z}$	$\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z) + k \times 2\pi$	$k \in \mathbb{Z}$
$\arg(\overline{z}) = -\arg(z) + k \times 2\pi$	$k \in \mathbb{Z}$	$\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + k \times 2\pi$	$k \in \mathbb{Z}$
$\forall n \in \mathbb{Z},\ \arg(z^n) = n \arg(z) + k \times 2\pi$	$k \in \mathbb{Z}$		

□

Théorème 7 – Forme exponentielle et opérations | Pour $z = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ et $z' = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta'}$ sous forme exponentielle

$$\rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} \times \rho' \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta'} = \rho\rho' \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\theta+\theta')}$$

$$\frac{\rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}}{\rho' \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta'}} = \frac{\rho}{\rho'} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\theta-\theta')}$$

□

Application| [2878] | 5| Travailler avec des quotients ou des produits

Mettre sous forme trigonométrique les complexes :

$(-4 + 4\mathrm{i})(\sqrt{3} + 3\mathrm{i})$	$\dfrac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{-4 + 4\mathrm{i}}$	$\dfrac{\sqrt{3} + 3\mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}$	$(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})^6$

□