CL02

Travailler avec les nombres complexes

Version du 08-09-2022 à 12:37

1. Les nombres complexes

Définition 1 – Corps des nombres complexes

On appelle **nombre complexe**, tout nombre de la forme

avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ où

.

On note $\mathbb{C}$ l'**ensemble des nombres complexes**.

Forme algébrique d'un complexe

Partie réelle

$z \quad =$

Partie imaginaire

Caractérisation de deux sous-ensembles de $\mathbb{C}$

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ puisque tout réel x peut s'écrire x
et ainsi :

$$(\, z \in \mathbb{R} \,) \quad \Leftrightarrow \quad (\qquad\qquad)$$

On appelle **imaginaire pur** tout nombre complexe z de la forme $z =$ avec $b \in \mathbb{R}$. Ainsi :

$$(\, z \text{ est un imaginaire pur} \,) \quad \Leftrightarrow \quad (\qquad\qquad)$$

Illustration

$z = 3 - 4\mathrm{i}$ $\qquad$ $z = -4 + \frac{1}{2}\mathrm{i}$ $\qquad$ $z = 4$ $\qquad$ $z = -8\mathrm{i}$ $\qquad$ $z = \sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{\pi}$

□

Théorème 1 – Égalité de deux nombres complexes

Deux nombres complexes sont **égaux** si, et seulement si, leurs .

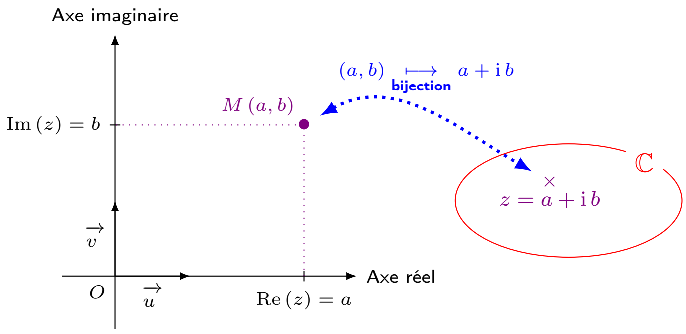
□

Définition 2 – Le plan complexe et affixe d'un point

Le plan $\mathcal{P}$ étant muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = \left(O\ ;\ \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, on peut identifier $\mathcal{P}$ à $\mathbb{C}$ à l'aide de l'application :

$$M(a,b) \longmapsto z = a + \mathrm{i}\, b$$

qui est clairement bijective.
Pour $M(a,b)$, le complexe $z = a + \mathrm{i}\, b$ ainsi associé est appelé l'affixe du point M, et on notera alors dans ce cas $M(z)$ au lieu de $M(a,b)$.



□

Théorème 2 – Addition et multiplication dans $\mathbb{C}$

On **étend** naturellement les **règles opératoires** sur $\mathbb{R}$ à l'ensemble $\mathbb{C}$, et on définit ainsi pour tous $z = a + \mathrm{i}\, b$ et $z' = a' + \mathrm{i}\, b'$ complexes écrits sous forme algébrique :

Addition dans $\mathbb{C}$	Multiplication dans $\mathbb{C}$
$z + z' =$	$z \times z' =$

L'**addition** et la **multiplication** dans $\mathbb{C}$ sont **associatives** et **commutatives**.

□

Il est hors de question d'apprendre ces formules ! Elles relèvent simplement des règles opératoires usuelles du calcul algégrique.

Application|[2864]| 1| Opérations avec les complexes

On pose $z_1 = 1 - 2\mathrm{i}$ et $z_2 = -3 + 4\mathrm{i}$.
Calculer :

(1). $z_1 + z_2$

(2). $z_1 - 2z_2$

(3). $z_1 z_2$

□

Théorème 3 – Inverse d'un nombre complexe non nul

Tout nombre complexe z **non nul** admet un **inverse** dans $\mathbb{C}$.
En d'autres termes : pour $z \neq 0$, il existe un complexe z' tel que $z \times z' = 1$.

□

Application| [2867] | 2| Inverse d'un complexe

Vérifier que l'inverse de i est $-\mathrm{i}$, puis trouver l'inverse de $1+\mathrm{i}$.

□

2. Conjugaison et applications

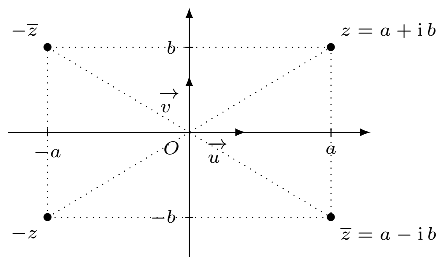
Contexte

Dans tout ce qui suit, et sauf mention contraire, $z = a + \mathrm{i}\, b$ et $z' = a' + \mathrm{i}\, b'$ sont deux complexes donnés sous leur forme algébrique, avec $(a, b, a', b') \in \mathbb{R}^4$.

□

Définition 3 – Conjugué d'un complexe

On appelle **conjugué** de $z = a + \mathrm{i}\, b$, le complexe noté défini par :



La conjugaison est **involutive** :

Lien entre conjugué, partie réelle et imaginaire

Pour tout $z \in \mathbb{C}$:

□

Proposition 1 – Opérations et conjugaison

Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, on a :

$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$	$\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$	$(\overline{z})^n = \overline{z^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$	$\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z'}}$ pour $z' \neq 0$	$\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ pour $z' \neq 0$

☐

Théorème 4 – Produit $z \times \overline{z}$

Pour tout nombre complexe z, le produit   est un   .

Pour tout $z = a + \mathrm{i}\, b \in \mathbb{C}$:

Nouvelle identité remarquable encore vraie si a et b complexes

Inverse d'un complexe non nul

Pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$\dfrac{1}{z} =$

avec $z \times \overline{z}$ réel strictement positif

$\dfrac{1}{z} =$

avec $z = a + \mathrm{i}\, b$ sous forme algébrique.

☐

Il est hors de question d'apprendre ces formules ! Elles relèvent simplement des règles opératoires usuelles du calcul algégrique.

Point méthode 1 – Obtenir la forme algébrique de $\dfrac{1}{z}$ ou de $\dfrac{z}{z'}$

- Pour $\dfrac{1}{z}$, on écrit $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z \times \overline{z}}$ en se rappelant que $z \times \overline{z} = a^2 + b^2$ si $z = a + \mathrm{i}\, b$.
- Pour $\dfrac{z}{z'}$, on remarque que $\dfrac{z}{z'} = z \times \dfrac{1}{z'}$ qui donnera $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{z \times \overline{z'}}{z' \times \overline{z'}}$ en se rappelant ce que vaut $z' \times \overline{z'}$.

☐

Application| [2868] | 3| Forme algébrique d'un quotient

Mettre sous forme algébrique $\dfrac{1}{2 - 2\mathrm{i}}$ et $\dfrac{1 + \mathrm{i}}{2 - \mathrm{i}}$.

☐

3 . Résolution d'équations de degré 2

Théorème 5 – Solutions complexes de $(\star) : az^2 + bz + c = 0$

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ un triplet de réels.
On considère l'équation $(\star) : az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue le complexe z.

On appelle discriminant de l'équation $(\star)$ le réel $\Delta = b^2 - 4ac$.

Cas où $\Delta \geq 0$

$(\star)$ possède deux solutions réelles

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

clairement égales lorsque $\Delta = 0$.

Cas où $\Delta < 0$

$(\star)$ possède deux solutions complexes conjuguées

□

Exemple 1 – Résolution d'équations de degré 2

Donner les solutions des équations $(\star_1) : z^2 + z + 1 = 0$ et $(\star_2) : z^2 - 3z + 2 = 0$.

□