CL01

Calculs de sommes et de produits finis

Version du 21-09-2022 à 08:50

Contexte

Dans tout ce chapitre, n, p et q désigneront des entiers naturels et $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ désigne une suite de nombres réels. □

1. Le symbole de sommation Σ

Définition 1 – Le symbole Σ

Sens du symbole

La **somme** $u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ des $n+1$ premiers termes de la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est notée .

On lit cette écriture « somme de $k=0$ jusqu'à n de u_k ».

Nombre de termes de la somme

$$\sum_{k=0}^{n} u_k =$$

La « variable » k est appelée **indice** de la somme ou que la **somme est indexée par** k.

Extension de la notation

La **somme** $u_p + u_{p+1} + \ldots + u_q$ des termes de la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dont les indices sont compris entre p et q avec $p \leq q$, s'écrit : $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} u_k =$

Illustration

$$\sum_{k=0}^{6} =$$

$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 =$

$$\sum_{k=3}^{9} =$$

$u_5 + u_6 + u_7 + u_8 + u_9 + u_{10} =$

□

Application|[2490]| 1| Utilisation du symbole $\sum$

Écrire les sommes à l'aide du symbole $\sum$:

(1). $S_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{15}$;

(2). $S_2 = 3^2 + 4^2 + \ldots + 87^2$;

(3). $S_3 = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \ldots + \frac{14}{15}$;

(4). $S_4 = 2 \times 3 + \times 3 \times 4 + \ldots + 15 \times 16$;

(5). $S_5 = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 1024$;

$\square$

Application|[2491]| 2| Expliciter une somme

Écrire explicitement les sommes :

$$A = \sum_{k=0}^{5} \frac{1}{2k+1} \text{ et } B = \sum_{k=3}^{7} \frac{2k^2}{k-1}$$

puis les calculer.

$\square$

Théorème 1 – Sommes des premiers entiers et des puissances

Sommes des n premiers entiers

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} k =$$

Illustration

$$1+2+3+4+5+6+7+8 \quad =$$
$$=$$
$$=$$
$$=$$

Cette formule est encore vraie si l'indice de départ est 0 : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \ =$

Somme des $n+1$ premières puissances

$$\forall q \neq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} q^k =$$

Illustration

$$2^0+2^1+2^2+2^3+2^4 \quad =$$
$$=$$
$$=$$
$$=$$

□

Éléments de preuve:

Application|[2494]**| 3| Calculer une somme**

Calculer les sommes suivantes en donnant le résultat sous forme fractionnaire :

(1). $S_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{192} k$;

(2). $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{8} (-3)^k$;

(3). $S_3 = \displaystyle\sum_{k=0}^{10} \frac{1}{2^k}$

(4). $S_4 = \displaystyle\sum_{k=0}^{9} \left(-\frac{1}{10}\right)^k$

□

2. Manipuler les sommes finies

Proposition 1 – Relation de Chasles

Pour tout entier naturel $n_0 \in [\![p;q]\!]$ avec $p < q$, on a : $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} u_k =$

Application au calcul des sommes tronquées

Pour tous $p < q$: $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} u_k =$

Illustration

$$\sum_{k=12}^{38} k \;=\; \sum_{k=12}^{24} k \qquad\qquad \sum_{k=12}^{38} k \;=\; \sum_{k=1}^{38} k$$

□

Application| [2496] **| 4| Somme tronquée**

Calculer les sommes suivantes en donnant le résultat sous forme fractionnaire :

(1). $S_1 = \displaystyle\sum_{k=125}^{192} k$;

(2). $S_2 = \displaystyle\sum_{k=4}^{8} (-3)^k$;

(3). $S_3 = \displaystyle\sum_{k=3}^{10} \frac{1}{2^k}$

(4). $S_4 = \displaystyle\sum_{k=2}^{9} \left(-\frac{1}{10}\right)^k$

□

Proposition 2 – Opérations sur les sommes de même indexation

Pour $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels :

Pour tout réel λ : $\displaystyle\sum_{k=p}^{q}(\lambda u_k) =$	$\displaystyle\sum_{k=p}^{q}(u_k+v_k) =$

Linéarité de la somme

$$\sum_{k=p}^{q}(\lambda u_k+v_k) =$$

Illustration

$$\sum_{k=3}^{12}(2k) =$$

$$\sum_{k=9}^{21}\left(k+k^2\right) =$$

$$\sum_{k=9}^{21}\left(3k+4k^2\right) =$$

□

Application| [2499] **| 5| Opérations sur les sommes**

Exprimer en fonction de n les sommes :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n}(2k) \text{ et } S_2 = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)$$

□

3. Changement d'indice dans une somme

Introduction – Histoire de décalage

On a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} \ln(k+3) =$

Mais on a aussi : $\displaystyle\sum_{i=3}^{13} \ln(i) =$

Ainsi :

La relation entre les deux indices de ces sommes est .

□

Proposition 3 – Changement d'indice dans une somme

Le **changement d'indice** $k = \ell - p$ laisse la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ inchangée :

Illustration

$\displaystyle\sum_{i=0}^{10} u_i =$ $=$	$\displaystyle\sum_{k=4}^{13} u_k =$ $=$	$\displaystyle\sum_{m=3}^{12} u_{m+2} =$ $=$

□

Point méthode 1 – Effectuer un changement d'indice dans une somme

Ancien indice : k Nouvel indice : ℓ → Relation entre k et ℓ de la forme $k = \ell \pm p$ où $p \in \mathbb{N}$ → Calcul des nouvelles bornes : quand $k = \ldots$ on a $\ell = \ldots$ → Transformation du terme général de la somme : « on remplace k par $\ell \pm p$ »

□

Application| [2500] | 6| Changement d'indice

Effectuer un changement d'indice dans la somme $\displaystyle\sum_{k=3}^{n+1} \ln(k)$ de sorte que la somme soit indexée à partir de 0.

□

Application| [2501] | 7| Changement d'indice

Effectuer un changement d'indice dans la somme $\sum_{k=0}^{n}(k+2)^2$ de sorte que le terme général de la somme devienne i^2 où i est le nouvel indice de sommation.

☐

4. Sommes téléscopiques

Proposition 4 – Téléscopage de termes

Le premier moins le dernier

Pour $p \leq n$, $\sum_{k=p}^{n}(u_k - u_{k+1}) = u_p - u_{n+1}$

Illustration | Justification

$$\begin{aligned} & \sum_{k=3}^{12}(u_k - u_{k+1}) \\ = \ & (u_3 - u_4) + (u_4 - u_5) + \ldots + (u_{12} - u_{13}) \\ = \ & u_3 - u_{13} \end{aligned}$$

Le dernier moins le premier

$$\sum_{k=p}^{n}(u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_p$$

Illustration | Justification

$$\begin{aligned} & \sum_{k=3}^{12}(u_{k+1} - u_k) \\ = \ & (u_4 - u_3) + (u_5 - u_4) + \ldots + (u_{13} - u_{12}) \\ = \ & u_{13} - u_3 \end{aligned}$$

On parle dans ce cas de **sommes téléscopiques** [a]

Illustration

$$\sum_{k=3}^{18}(\ln(k) - \ln(k+1)) = \ln(3) - \ln(18) \qquad \sum_{k=3}^{18}(\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(18 - \ln(3)$$

☐

a. notamment lorsque le terme général de la somme s'exprime comme la différence de deux termes successifs d'une même suite.

Éléments de preuve:
C'est une conséquence de la linéarité de la somme et d'un changement d'indice.

Point méthode 2 – Calculer une somme à l'aide d'un téléscopage

- on essaie de transformer le terme général de la somme de sorte à écrire la somme sous la forme $\sum_{k=\dots}^{\dots}(u_{k+1}-u_k)$ ou $\sum_{k=\dots}^{\dots}(u_k-u_{k+1})$;
- on détermine les deux termes qui restent à l'issue du télescopage.

□

Application| [2503] | 8| Somme tél/'escopique

Calculer $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ où $n \geq 1$, en remarquant que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$

□

Application| [2504] | 9| Somme téléscopique

À l'aide d'un téléscopage de termes, exprimer en fonction de $n \geq 2$ la somme $\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)$.

□

5. Produits finis

Définition 2 – Le symbole $\prod$

Sens du symbole

Le **produit** $u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n$ des $n+1$ premiers termes de la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est notée .

On lit cette écriture **« produit de $k=0$ jusqu'à n de u_k »**.

Nombre de facteurs du produit

$$\prod_{k=0}^{n} u_k =$$

La « variable » k est appelée **indice** du produit ou que le **produit est indexé par** k.

Extension de la notation

Le **produit** $u_p \times u_{p+1} \times \ldots \times u_q$ des termes de la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dont les indices sont compris entre p et q avec $p \leq q$, s'écrit : $\displaystyle\prod_{k=p}^{q} u_k =$

Illustration

$$\prod_{k=0}^{6} =$$

$u_0 \times u_1 \times u_2 \times u_3 \times u_4 =$

$$\prod_{k=3}^{9} =$$

$u_5 \times u_6 \times u_7 \times u_8 \times u_9 \times u_{10} =$

□

Application| [2507] | **10**| **Manipuler le symbole $\prod$**

Écrire à l'aide du symbole $\prod$, le produit $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} \times \ldots \times \frac{1}{20}$.

□

Proposition 5 – Relation de Chasles

Pour tout entier naturel $n_0 \in [\![p;q]\!]$ avec $p < q$

$$\prod_{k=p}^{q} u_k =$$

Produits tronqués | Pour tout $p < q$

$$\prod_{k=p}^{q} u_k \quad =$$

.

Illustration

$$\prod_{k=8}^{22} u_k = \left(\prod_{k=8}^{13} u_k\right) \times$$

$$\prod_{k=8}^{16} u_k =$$

□

Proposition 6 – Opérations sur les produits de même indexation

Pour $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\prod_{k=p}^{q} (u_k \times v_k) \ =$$

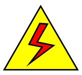
$$\prod_{k=8}^{24} \left(k^2 (k+1)\right) =$$

$$\prod_{k=p}^{q} (\lambda u_k) \ = \qquad\qquad \times \left(\prod_{k=p}^{q} u_k\right)$$

$$\prod_{k=7}^{21} (2k) \ =$$

□

Proposition 7 – Changement d'indice dans un produit



Le **changement d'indice** $k = \ell - p$ laisse le produit $\prod_{k=0}^{n} u_k$ inchangé : $\prod_{k=0}^{n} u_k = \prod_{\ell=p}^{n+p} u_{\ell-p}$

□

Proposition 8 – Téléscopage de facteurs

Le premier sur le dernier

Pour $p \leq n$, $\displaystyle\prod_{k=p}^{n} \left(\frac{u_k}{u_{k+1}}\right) =$

Le dernier sur le premier

Pour $p \leq n$, $\displaystyle\prod_{k=p}^{n} \left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) =$

Illustration | Justification

$$\prod_{k=12}^{31} \frac{u_k}{u_{k+1}} =$$

$$=$$

On parle dans ce cas de **produits téléscopiques**.

☐

Sous entendu que tous ces quotients aient du sens. . .

Application| [2510] | 11| Opérations sur les produits

Donner une autre écriture du produit $P = \displaystyle\prod_{k=4}^{14} 2^{k-2}$ à l'aide du symbole $\prod$.

☐

Proposition 9 – Passer d'un produit à une somme et vice-versa

Les opérations sur la fonction exponentielle donnent :

Somme vers produit

$$\exp\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) = \prod_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{u_k}$$

Produit vers somme

$$\ln\left(\prod_{k=0}^{n} u_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \ln(u_k)$$

Sous réserve que :

☐

6. Factorielle d'un entier et coefficients binomiaux

Définition 3 – Factorielle d'un entier naturel

On appelle **factorielle de** n le nombre entier que l'on note , que l'on lit « factorielle n » défini par :

Définition formelle

On a donc :

Explicitation de $n!$

$n! =$

Relation fondamentale

Pour $n \geq 1$:

Illustration | Calcul de quelques valeurs

$$
\begin{aligned}
7! &= \\
&= \\
&= \\
&=
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
8! &= \\
&= \\
&= \\
&=
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
10! &= 3\,628\,800 \\
15! &= 1\,307\,674\,368\,000 \\
20! &= 2\,432\,902\,008\,176\,640\,000
\end{aligned}
$$

Illustration | Simplification d'expressions

$$
\begin{aligned}
\frac{8!}{3! \times 5!} &= \\
&= \\
&= \\
&= \\
&=
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{10!}{7! \times 3!} &= \\
&= \\
&= \\
&= \\
&= \\
&=
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n} (2k) &= \\
&=
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{n!}{(n+1)!} &= \\
&=
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n} (k^2) &= \qquad \times \\
&= \\
&=
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{(n+2)!}{(n-1)!} &= \\
&=
\end{aligned}
$$

□

Définition 4 – Coefficients binomiaux

Les **coefficients binomiaux** sont les **entiers naturels** notés $\binom{n}{p}$ définis par :

L'écriture $\binom{n}{p}$ se lit « p parmi n ».

Cas particuliers

$\binom{n}{0} =$ | $\binom{n}{1} =$ | $\binom{n}{n} =$ | $\forall p \in [\![0;n]\!]$,

☐

Application | [2516] | 12 | **Calculer un coefficient binomial**

Calculer $A = \binom{9}{3}$ et $B = \binom{12}{8}$.

☐

Théorème 2 – Formule de Pascal

Formule du triangle de Pascal :

Calcul des coefficients binomiaux

On peut représenter les coefficients du binôme dans un tableau, que l'on appelle couramment **le triangle de Pascal** où l'on voit apparaître un algorithme de calcul.

n \ p	0	1	2	3	4	5	...
0	1	0					
1	1	1	0				
2	1	2	1	0			
3	1	3	3	1	0		
4	1	4	6	4	1	0	
$\vdots$							

☐

Application| [2517] | **13| Calculer un coefficient binomial**

À l'aide du triangle de Pascal, calculer $\binom{6}{k}$ où $k \in [\![0;6]\!]$.

□

7. Binôme de Newton

Théorème 3 – Formule du binôme de Newton

Pour tous réels a et b : $(a+b)^n =$ ou $(a+b)^n =$

Mettre en forme la formule à partir du triangle de Pascal

$$\begin{aligned}(a+b)^5 &= \\ &= \\ &=\end{aligned}$$

□

Application| [2518] | **14| Binôme de Newton**

Développez chacune des expressions suivantes à l'aide du binôme de Newton :

(1). $(2x+3)^3$;
(2). $(3x+1)^4$;
(3). $(3-5x)^3$;
(4). $(3-2x)^5$;

□