AN09

Théorèmes fondamentaux de la dérivation

Version du 09-02-2023 à 12:30

Contexte

Dans ce paragraphe, et sauf mention contraire, I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point, x_0 un élément de I et $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction de la variable réelle.

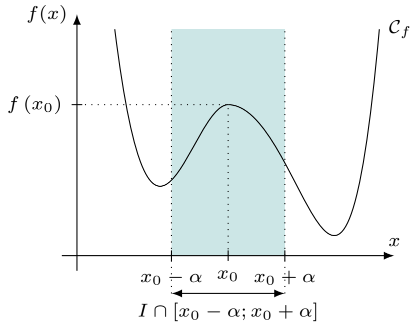
□

1 . Condition d'existence d'un extremum local

Définition 1 – Extremum local

f présente un **maximum** (resp. **minimum**) **local en** x_0 lorsqu'il existe $\alpha > 0$ tel que $f(x_0)$ soit le maximum (resp. le minimum) de f sur $I \cap [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$, c'est à dire :

$$\forall x \in I \cap [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha], \quad f(x) \underset{\text{resp. } \geq}{\leq} f(x_0)$$



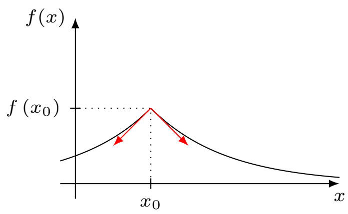
□

Théorème 1 – Extremum local et nombre dérivé

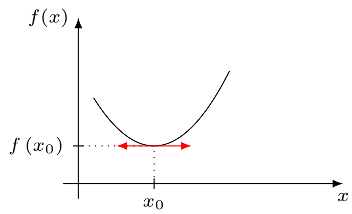
On suppose que $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ et que f présente en x_0 un extremum local et que $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$ existent .

Pour $f(x_0)$ maximum local

Si $f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$ alors $f'_g(x_0) \geq 0 \geq f'_d(x_0)$

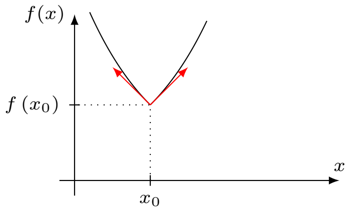


Si $f'_d(x_0) = f'_g(x_0) = f'(x_0)$ alors $f'(x_0) = 0$

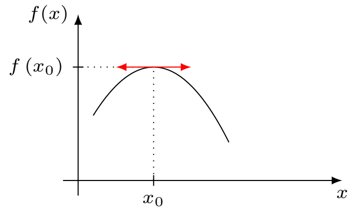


Pour $f\left(x_0\right)$ minimum local

Si $f_d'\left(x_0\right) \neq f_g'\left(x_0\right)$ alors $f_g'\left(x_0\right) \leq 0 \leq f_d'\left(x_0\right)$



Si $f_d'\left(x_0\right) = f_g'\left(x_0\right) = f'\left(x_0\right)$ alors $f'\left(x_0\right) = 0$



Formulation à retenir

Si f présente un extremum en x_0 et que f est dérivable en x_0, alors $f'\left(x_0\right) = 0$.

□

Éléments de preuve:
On suppose que f présente un minimum local en x_0.
Il est immédiat que : $\forall x \geq x_0,\ \dfrac{f(x) - f\left(x_0\right)}{x - x_0} \geq 0$ et donc par passage à la limite $f_d'\left(x_0\right) \geq 0$
et que : $\forall x \leq x_0,\ \dfrac{f(x) - f\left(x_0\right)}{x - x_0} \leq 0$ et donc par passage à la limite$f_g'\left(x_0\right) \leq 0$
On en déduit que $f_g'\left(x_0\right) \leq 0 \leq f_d'\left(x_0\right)$.
Lorsque $f_g'\left(x_0\right) = f_d'\left(x_0\right) = f'\left(x_0\right)$, ce qui est le cas lorsque f est dérivable en x_0, on trouve donc que $f'\left(x_0\right) = 0$.

Point méthode 1 – Où chercher les extrema d'une fonction ?

Pour obtenir les valeurs extrêmes d'une fonction :

- On exploite les variations de la fonction.
- Si f est dérivable, on cherche les points où la dérivée s'annule, **mais cela donne uniquement des candidats**.
- Toute fonction continue sur un segment a un maximum et un minimum global, mais on ne sait *a priori* pas où...

□

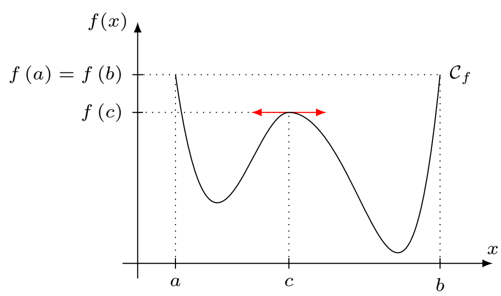
2. Théorème de Rolle

Théorème 2 – Théorème de Rolle

Soit $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que
- f est continue sur $[a; b]$;
- f est dérivable sur $]a; b[$.

Si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in\ ]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.

- C'est un théorème d'existence et non constructif ;
- Il n'y a pas l'unicité en général



□

Éléments de preuve:

Si f est constante sur $[a;b]$ en revenant à la définition du nombre derivé en un un point que, pour tout $x \in [a;b]$, $f'(x) = 0$ et ainsi qu'il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Si f n'est pas constante sur $[a;b]$ la fonction f étant continue sur $[a;b]$, d'après le théorème des bornes atteintes, elle est bornée et atteint ses bornes. On note alors $M = \sup_{x\in[a;b]} f(x)$ et $m = \inf_{x\in[a;b]} f(x)$ et on a $m < M$. L'une au moins des inégalités $M > f(a)$ ou $m < f(a)$ est vérifiée, par exemple $M > f(a)$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, puisque f est continue sur $[a;b]$, il existe c tel que $f(c) = M$ et $c \in]a;b[$ car $f(a) \neq M$ et $f(b) \neq M$. La fonction f admet en c un maximum local. La fonction f étant dérivable sur $]a;b[$, on en déduit que $f'(c) = 0$ d'après le résultat précédent.

Application|[3193]| 1| Application du théorème de Rolle

Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3x^4 - 11x^3 + 12x^2 - 4x + 2 \end{array} \right.$.
Montrer que f' s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]0;1[$.

□

3. Égalité des accroissements finis

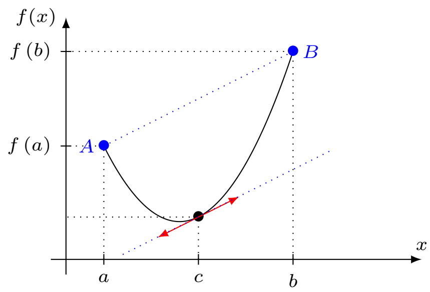
Théorème 3 – Théorème des accroissements finis

Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

- f est continue sur $[a;b]$;
- f est dérivable sur $]a;b[$.

Il existe $c \in]a;b[$ tel que : $$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

- C'est un théorème d'existence et non constructif ;
- Il n'y a pas l'unicité en général



Interprétation graphique

Il existe une tangente à $\mathcal{C}_f$ dont le coefficient directeur est exactement celui de la droite (AB).

□

Éléments de preuve:

On considère la fonction $\Phi : x \longmapsto f(x) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.
La fonction Φ est continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$ et vérifie $\Phi(a) = \Phi(b)$.
Donc d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a;b[$ tel que $\Phi'(c) = 0$ et on obtient alors que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Application| [3201] | 2| Théorème des accroissements finis

(1). Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2$ tel que $0 \leq a < b$.

(a). Montrer qu'il existe $c \in]a;b[$ tel que :
$$\frac{1}{1+c^2} = \frac{\arctan(b) - \arctan(a)}{b-a}.$$

(b). Justifier que $\dfrac{1}{1+b^2} \leq \dfrac{1}{1+c^2} \leq \dfrac{1}{1+a^2}$.

(c). En déduire que $\dfrac{1}{1+b^2} \leq \dfrac{\arctan(b) - \arctan(a)}{b-a} \leq \dfrac{1}{1+a^2}$.

(2). En déduire que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{x}{1+x^2} \leq \arctan(x) \leq x.$$

□

4 . Inégalité des accroissements finis

Théorème 4 – Inégalité des accroissements finis

Si $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est telle que
- f est continue sur $[a;b]$;
- f est dérivable sur $]a;b[$.
- il existe m et M réels, tels que : $\underbrace{\forall x \in]a;b[, \quad m \leq f'(x) \leq M}_{f' \text{ est bornée sur }]a;b[}$

alors $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$ ou encore $m \leq \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq M$

Inégalité des accroissements finis sur un intervalle I

Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est telle que
- f est dérivable sur I ;
- $|f'|$ est majorée par $M \in \mathbb{R}$ sur I, c'est à dire : $\forall x \in I, \quad |f'(x)| \leq M$

alors : $\forall (x,y) \in I^2, \quad |f(y) - f(x)| \leq M\,|y-x|$

□

Application| [3202] | 3| Suite récurrente

(1). Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 4 - \dfrac{1}{4}\ln(x) \end{array} \right.$

(a). Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b). En déduire que pour tout $x \in [3;4]$, $f(x) \in [3;4]$.

(c). Montrer que : $\quad \forall x \in [3;4], \quad |f'(x)| \leq \dfrac{1}{12}$.

(d). Justifier que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in]3;4[$.

(2). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{array} \right.$.

(a). Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [3;4].$$

(b). En déduire alors que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{12}\,|u_n - \alpha|$.

(c). Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{12}\right)^n \qquad (\star).$$

(d). En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

(e). À l'aide de la relation $(\star)$, déterminer $n_0 \in \mathbb{N}$ pour que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-5} près.

□

Point méthode 2 – Établir la convergence d'une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$ à l'aide des accroissements finis

Pour étudier une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments d'un intervalle I définie par les relations $\underset{\text{où } f : I \longrightarrow \mathbb{R} \text{ est dérivable sur } I}{\begin{cases} u_0 = \dots \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}}$:

- On s'assure que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution noté α sur I.
- En remarquant que $u_{n+1} = f(u_n)$ et que $\alpha = f(\alpha)$ on établit à l'aide de $\boxed{\text{l'inégalité des accroissements finis}}$ que :

$$\underset{M \text{ étant un majorant de } |f'|}{\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq M\,|u_n - \alpha|}$$

- Par un raisonnement par récurrence, on établit alors que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq M^n\,|u_0 - \alpha|$
- Dès lors que $|M| < 1$ on peut en conclure que $|u_n - \alpha| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$.

□

5. Variations et dérivabilité

Théorème 5 – Fonctions constantes ou monotones sur un segment

On suppose que $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est telle que

- f est continue sur $[a;b]$;
- f est dérivable sur $]a;b[$.

Caractérisation des fonctions constantes

$$\left(f \text{ est constante sur } [a;b]\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\forall x \in]a;b[, \quad f'(x) = 0\right)$$

Caractérisation des fonctions monotones

$$\left(f \text{ est } \underset{\text{resp. décroissante}}{\text{croissante}} \text{ sur } [a;b]\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\forall x \in]a;b[, \quad f'(x) \underset{\text{resp. } \leq}{\geq} 0\right)$$

Quelques remarques

Ces théorèmes donnent un résultat sur $[a;b]$, **même si l'on ne sait pas ce que f' fait aux bornes de l'intervalle** $[a;b]$.

Pour ces deux théorèmes, on peut **remplacer** $[a;b]$ par I intervalle quelconque, et $]a;b[$ par l'intérieur de I, c'est à dire $\mathring{I}$.

On se sert de ces théorèmes pour étudier les variations :

- Ils ne sont valables que sur des intervalles.
- On ne s'occupe pas de ce que f' fait aux bornes de l'intervalle sur lequel on travaille.

□

6. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Contexte

Dans ce paragraphe, sauf mention contraire, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $n \in \mathbb{N}$.

□

Définition 2 – Dérivation n^e

On suppose que f est **dérivable** sur I.

Dérivée seconde

Lorsque f' est **dérivable** en x_0, alors on dit que f est **deux fois dérivable en** x_0.
On note alors : $(f')'(x_0) = f''(x_0)$.
Lorsque f' est dérivable sur I, on définit la **fonction dérivée seconde** f'' de f par : $f'' = (f')'$

Dérivée n^e

Par récurrence, on définit **la dérivée** n^e **de** f notée $f^{(n)}$:
Lorsque f', f'', ..., $f^{(n-1)}$ existent sur I et si $f^{(n-1)}$ est dérivable en x_0, on dit que f **est** n **fois dérivable en** x_0 et on note $f^{(n)}(x_0) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x_0)$.
Lorsque $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I, on peut définir la **dérivée** n^e **de** f sur I par : $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$

On pose par convention que $f^{(0)} = f$ étant clair que $f^{(1)} = f'$.

□

Application| [3204] | 4| Dérivée n^e de cosinus

Montrer par récurrence sur l'entier n que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

□

Définition 3 – Classe d'une fonction

Classe $\mathcal{C}^n$

On dit que f **est de classe** $\mathcal{C}^n$ **sur** I lorsque f est n **fois dérivable** sur I et que $f^{(n)}$ est **continue sur** I.
On définit alors :

$$\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}) = \{f : I \longrightarrow \mathbb{R},\ f \text{ de classe } \mathcal{C}^n \text{ sur } I\}$$

Classe $\mathcal{C}^\infty$

On dit que f **est de classe** $\mathcal{C}^\infty$ **sur** I lorsque f est de **classe** $\mathcal{C}^n$ pour tout n, c'est à dire que f est **indéfiniement dérivable**.
On définit alors :

$$\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}) = \{f : I \longrightarrow \mathbb{R},\ f \text{ de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } I\}$$

Traduction dans le cas $n = 0$ et $n = 1$

Ces définitions donnent dans le cas où $n = 0$ et $n = 1$:

$$\left(f \text{ est de classe } \mathcal{C}^0 \text{ sur } I\right) \Leftrightarrow \left(f \text{ est continue sur } I\right)$$

$$\left(f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} f \text{ est } \underline{\text{dérivable}} \text{ sur } I \\ \text{et} \\ f' \text{ est } \underline{\text{continue}} \text{ sur } I \end{pmatrix}$$

□

Proposition 1 – Classe et dérivée n^{e} des fonctions usuelles

Exponentielle

La fonction $\exp : x \longmapsto \mathrm{e}^x$ est indéfiniement dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x$$

Ainsi, la fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Cosinus

La fonction $\cos : x \longmapsto \cos(x)$ est indéfiniement dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

Ainsi, la fonction cosinus est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Sinus

La fonction $\sin : x \longmapsto \sin(x)$ est indéfiniement dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

Ainsi, la fonction sinus est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Logarithme

La fonction $\ln : x \longmapsto \ln(x)$ est indéfiniement dérivable sur $]0;+\infty[$ et telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\, \forall x \in]0;+\infty[, \quad \ln^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

Ainsi, la fonction logarithme népérien est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$.

□

Proposition 2 – Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Descendre d'une classe

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Si f est n fois dérivable sur I

alors pour tout $p \in [\![0;n-1]\!]$, f est p fois dérivable sur I ;

Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I

alors pour tout $0 \leq p \leq n-1$, f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I.

Si cela existe

alors $\forall\,(p,q) \in \mathbb{N}^2, \quad \left(f^{(p)}\right)^{(q)} = f^{(p+q)}$

Transfert de classe par opérations

Si f et g sont n fois dérivables sur I, **alors** les fonctions $f+g$, $\lambda \times f$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et fg sont n **fois dérivables sur** I.

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$$

$$(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$$

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Formule de Leibniz - HORS PROGRAMME

Classe de la fonction réciproque

Si f est **continue** sur I et strictement monotone sur I, **alors** f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$.
Si f est n fois dérivable sur I et telle que pour tout $x \in I$, $f'(x) \neq 0$, **alors** f^{-1} est n fois dérivable sur J.

Composition

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $f(I) \subset J$, et $n \in \mathbb{N}^*$.
Si f et g sont n fois dérivables sur I et J respectivement, alors $g \circ f$ l'est aussi sur I.

Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ ou $\mathcal{C}^\infty$

Ces résultats s'étendent aux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I ou encore de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

□