AN08

Dérivée d'une fonction et interprétation graphique

Version du 09-02-2023 à 12:14

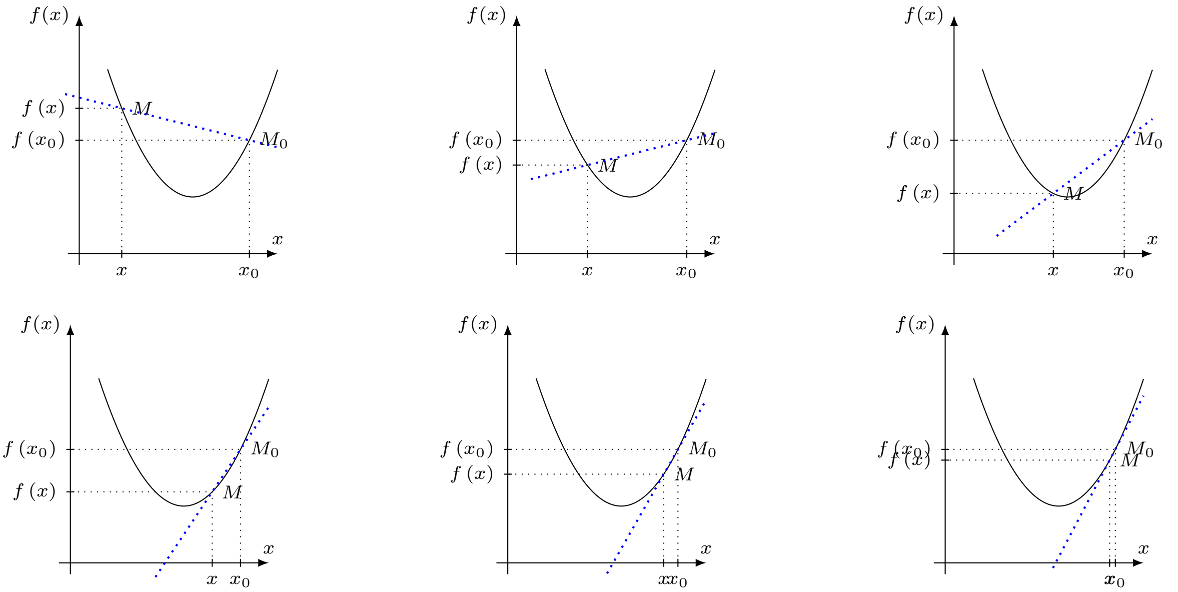
1. Notion de tangente en un point du graphe

Contexte

Dans ce paragraphe, et sauf mention contraire, I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point, x_0 un élément de I et $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction de la variable réelle.

□

Définition 1 – Limite du taux d'accroissement



La **droite** (M_0M), où $M(x, f(x))$ et $M_0(x_0, f(x_0))$ a pour coefficient directeur $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Si $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$ avec ℓ réel fini, alors, la droite (M_0M) **tend vers une droite non verticale**, que l'on appelle alors **tangente à la courbe représentative de** f **en** x_0.

Il s'agit donc de la **droite passant par** $M_0(x_0, f(x_0))$ et de **coefficient directeur** ℓ.

On notera alors $f'(x_0)$ cette limite c'est à dire : $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f'(x_0)$

Graphiquement, cela signifie que le point M se rapproche du point M_0. La tangente est ainsi la « droite limite » ainsi obtenue.

Équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$

On suppose que $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell = f'(x_0)$ réel fini.

La **tangente** à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x_0 est la droite passant par le point $M_0(x_0, f(x_0))$ et **a pour équation** :

$$y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$$

□

Définition 2 – Dérivabilité en x_0

On dira que f est dérivable en x_0 lorsque $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe et est réelle.

Lorsque c'est le cas, cette limite s'appelle le nombre dérivé de f en x_0, et on notera $f'(x_0)$ la valeur de cette limite, c'est à dire : $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f'(x_0)$

□

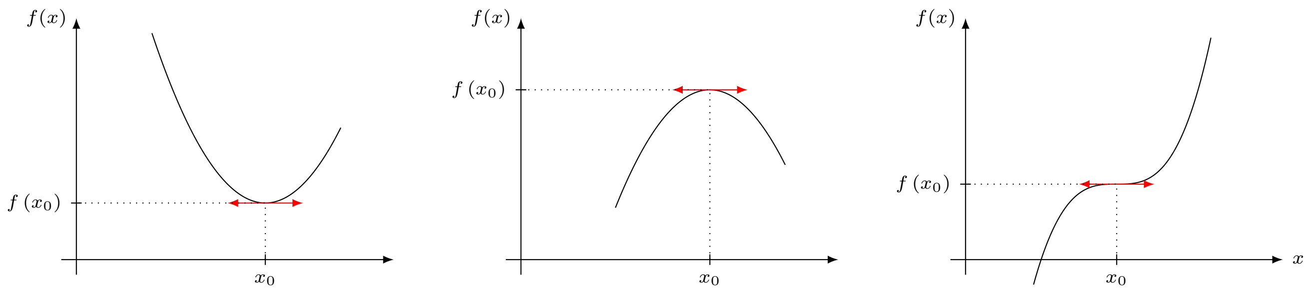
En notant $h = x - x_0$, cette définition est équivalente à la suivante : f est dérivable en x_0 lorsque $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ **existe** et est **réelle**.

Définition 3 – Tangente horizonale

Lorsque $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$ c'est à dire $f'(x_0) = 0$, la tangente à $\mathcal{C}_f$ en x_0 est parallèle à l'axe des abscisses, c'est à dire est horizontale, et a pour équation $y = f(x_0)$.

Exemple de positions possibles

Dans ce cas $\mathcal{C}_f$ peut ou non traverser sa tangente comme par exemple :



□

Définition 4 – Tangente verticale

Lorsque $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} +\infty$ ou $-\infty$, on dira que la courbe représentative de f présente au point x_0 une tangente verticale qui a pour équation $x = x_0$.

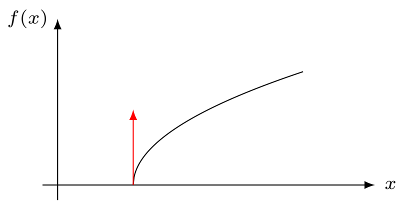
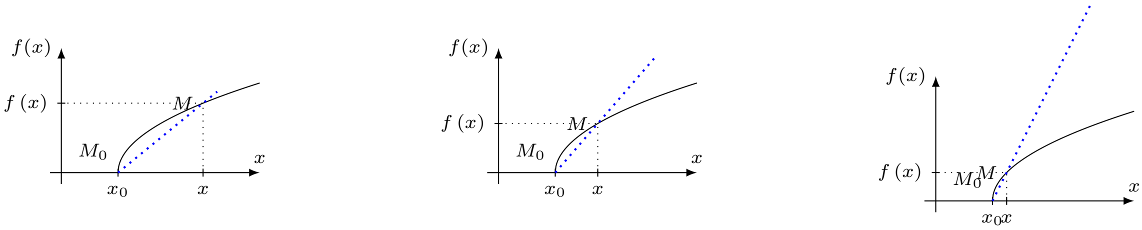


Illustration de cette « verticalisation »



Exemple usuel

La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0 et présente en ce point là une tangente verticale d'équation $x = 0$.

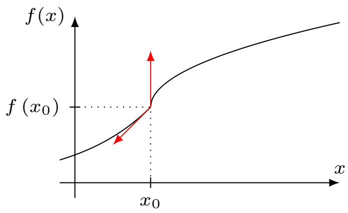
□

2. Tangente à gauche et à droite

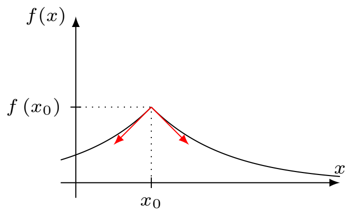
Remarque 1 – Taux d'accroissement à gauche et à droite différents

Lorsque l'on détermine la limite en x_0 de $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, on est parfois amené à distinguer le calcul de la limite à gauche en 0 et de la limite à droite en 0 pour ce taux d'accroissement.

On obtient <u>parfois</u> pour ces deux limites des <u>valeurs différentes</u>, qu'il conviendra d'interpréter comme sur les deux exemples ci-dessous.



$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \underset{x\to x_0^+}{\longrightarrow} +\infty$ mais $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \underset{x\to x_0^-}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$



$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \underset{x\to x_0^+}{\longrightarrow} \ell_1 \in \mathbb{R}$ mais $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \underset{x\to x_0^-}{\longrightarrow} \ell_2 \in \mathbb{R}$ avec $\ell_1 \neq \ell_2$

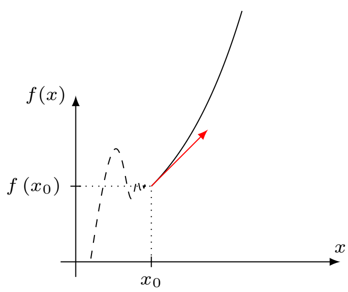
□

Définition 5 – Dérivabilité à droite

On suppose ici que $x_0 \neq \sup(I)$.

On dit que f est **dérivable à droite en** x_0 lorsque la **restriction** de f à l'intervalle $I \cap [x_0; +\infty[$ est **dérivable** en x_0 c'est à dire :

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \underset{h\to 0^+}{\longrightarrow} \ell \underset{\text{Déf.}}{=} f'_d(x_0) \in \mathbb{R}$$



La **demi-tangente à droite** $\mathcal{T}_d$ à $\mathcal{C}_f$ en x_0 est la demi-droite d'équation : $\mathcal{T}_d$: $\begin{cases} y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \geq x_0 \end{cases}$

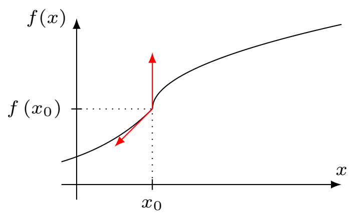
Dérivabilité à gauche

On suppose ici que $x_0 \neq \inf(I)$.

On dit que f est **dérivable à gauche en** x_0 lorsque la **restriction** de f à l'intervalle $]-\infty; x_0] \cap I$ est **dérivable** en x_0 c'est à dire : $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \underset{h \to 0^-}{\longrightarrow} \ell \underset{\text{Déf.}}{=} f'_g(x_0) \in \mathbb{R}$
et on peut ainsi définir la notion de **demi-tangente à gauche en** x_0.

Demi-tangente verticale

On rappelle que si $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} +\infty$ ou $-\infty$, alors la fonction n'est pas dérivable en x_0, et $\mathcal{C}_f$ présente en ce point une tangente verticale.
Cette définition s'étend ainsi à la notion de dérivée à droite ou à gauche, où l'on parlera de **demi-tangente verticale à droite** ou **à gauche**.



□

3. Fonctions dérivables

Contexte

Dans ce paragraphe, et sauf mention contraire, I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point, x_0 un élément de I et $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction de la variable réelle.

□

Définition 6 – Dérivabilité en un point et fonction dérivable et fonction dérivée

Dérivabilité en un point x_0

On dit que f est dérivable en $x_0 \in I$ lorsque le taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ de f en x_0 a une limite finie en x_0.
On note alors $f'(x_0)$ cette limite, c'est à dire : $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f'(x_0)$
Le nombre $f'(x_0)$ est appelé nombre dérivé de f en x_0 .

On rappelle que l'on a une définition analogue en utilisant la limite en 0 du quotient $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$.

Fonction dérivée

On appelle alors dérivée de f ou fonction dérivée de f , l'application qui, à chaque $x \in I$ tel que $f'(x)$ existe, associe $f'(x)$.

Si l'on note $\Delta_f = \{x \in I,\ f'(x) \text{ existe}\}$, on a ainsi : $f' : \left| \begin{array}{ccc} \Delta_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array} \right.$

□

CC BY NC ND

Remarque 2 – Autre expression et notations

- La notion de dérivée en un point est une notion locale : on regarde en effet le comportement du quotient $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ pour h au voisinage de 0.
- Le nombre $f'(x_0)$ est parfois noté $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$ ou $\mathrm{D}f(x_0)$.

□

Proposition 1 – Calculs de dérivées et opérations sur les dérivées

Dérivée d'une combinaison linéaire

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$, et $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
Si f et g sont dérivables en x_0,
alors $f+g$ et λf le sont, et on a :

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$
$$\text{et } (\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$$

$$f+g \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} f'+g'$$

$$\lambda f \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} \lambda f'$$

Dérivée d'un produit

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.
Si f et g sont dérivables en x_0,
alors fg et λf le sont, et on a :

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0)$$

$$f \times g \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} f' \times g + f \times g'$$

Dérivée d'une composée

I et J désignent deux intervalles non vides non réduits à un point de $\mathbb{R}$.
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset J$, et $x_0 \in I$.
Si f est dérivable en x_0 et si g est dérivable en $f(x_0)$,
alors $g \circ f$ est dérivable en x_0, et :

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times g'(f(x_0))$$

$$g \circ f \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} f' \times (g' \circ f)$$

Dérivé de l'inverse

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que que, pour tout $x \in I$, $f(x) \neq 0$, et $x_0 \in I$.
Si f est dérivable en x_0,
alors $\dfrac{1}{f}$ est définie sur I et est dérivable en x_0, et :

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{(f(x_0))^2}$$

$$\frac{1}{f} \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} -\frac{f'}{f^2}$$

Dérivé d'un quotient

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in I$, $g(x) \neq 0$, et $x_0 \in I$.
Si f et g sont dérivables en x_0,
alors $\dfrac{f}{g}$ est définie sur I et est dérivable sur I, et :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

$$\frac{f}{g} \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$$

Dérivée de la fonction réciproque

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et strictement monotone sur I.
Alors f réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$. On note $g = f^{-1}$ sa bijection réciproque.
Soit $x_0 \in J$.
Si f est dérivable en $t_0 = g(x_0)$ et $f'(t_0) \neq 0$,
alors g est dérivable en x_0 et :

$$g'(x_0) = \frac{1}{f'(t_0)} = \frac{1}{f'(g(x_0))}$$

$$f^{-1} \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

□

CC BY NC ND

Proposition 2 – Dérivée des fonctions usuelles

Dans cet encart, u désigne une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ de sorte que les composées écrites ci-dessous soient définies et dérivables.

Puissances pour $n \in \mathbb{Z}$

$$x^n \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} nx^{n-1}$$

$$u^n \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} u' \times nu^{n-1}$$

Exponentielle

$$\mathrm{e}^{x} \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} \mathrm{e}^{x}$$

$$\mathrm{e}^{u} \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} u' \times \mathrm{e}^{u}$$

Puissances pour $\alpha \in \mathbb{R}$

$$x^\alpha \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} \alpha x^{\alpha-1}$$

$$u^\alpha \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} u' \times \alpha u^{\alpha-1}$$

Logarithme

$$\ln(x) \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} \frac{1}{x}$$

$$\ln(u) \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} u' \times \frac{1}{u}$$

Cosinus

$$\cos(x) \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} -\sin(x)$$

$$\cos(u) \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} -u' \times \sin(u)$$

Sinus

$$\sin(x) \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} \cos(x)$$

$$\sin(u) \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} u' \times \cos(u)$$

Tangente

$$\tan(x) \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$\tan(u) \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} u' \times \left(1 + \tan^2(u)\right) = u' \times \frac{1}{\cos^2(u)}$$

Arctangente

$$\arctan(x) \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} \frac{1}{1+x^2}$$

$$\arctan(u) \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} u' \times \frac{1}{1+u^2}$$

□

4. Lien entre dérivabilité à gauche et à droite et dérivabilité

Définition 7 – Notion d'intérieur d'un intervalle et dérivabilité

On note $\mathring{I}$ l'ensemble des points de I distincts des bornes, on l'appelle **intérieur de** I.

Illustration

Pour $I = [-3;4]$, on a : $\mathring{I} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Pour $I = [-3;4[$, on a : $\mathring{I} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Pour $I =]-3;4]$, on a : $\mathring{I} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Pour $I =]-\infty;4]$, on a : $\mathring{I} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Dérivabilité sur un intervalle I

En fait, quand on dit f est dérivable sur I c'est que :

- f est dérivable en tout point de l'intérieur de I,
- f est dérivable à gauche en $\sup(I)$ si $\sup(I) \in I$,
- f est dérivable à droite en $\inf(I)$ si $\inf(I) \in I$.

□

Théorème 1 – Dérivabilité en un point intérieur à I

On suppose que $x_0 \in \overset{\circ}{I}$.

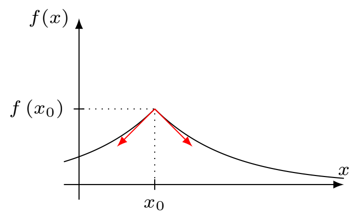
$$\left(f \textbf{ est dérivable en } x_0\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} f \text{ est } \textbf{dérivable à gauche} \\ \textbf{et à droite} \text{ en } x_0 \\ \text{avec } f'_d(x_0) = f'_g(x_0) \end{array}\right)$$

Lorsque c'est le cas, on a : $\begin{array}{rcl} f'(x_0) & = & f'_d(x_0) \\ & = & f'_g(x_0) \end{array}$.

□

Définition 8 – Point anguleux

En un point $M(x_0, f(x_0))$ avec $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ si $f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$ (sous réserve qu'elles existent), on dit que M est un point anguleux.

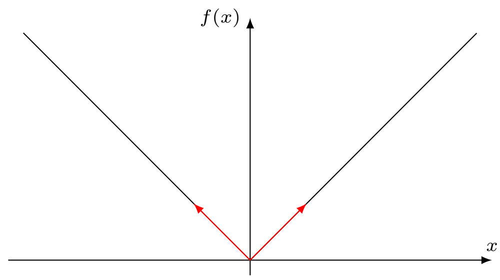


Cas classique de point anguleux : la valeur absolue

La fonction $x \longmapsto |x|$ présente en 0 un point anguleux.
En effet, puisque :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |x| = \left\{\begin{array}{rcl} x & \text{si} & x \geq 0 \\ -x & \text{si} & x < 0 \end{array}\right.$$

on en déduit que son nombre dérivé à droite vaut 1, alors que son nombre dérivé à gauche vaut -1.



La fonction $x \longmapsto |x|$ n'est donc pas dérivable en 0.

□

5. Lien continuité et dérivabilité

Théorème 2 – Continuité et dérivabilité

Si f est dérivable en x_0 (resp. à droite, à gauche),
alors f est continue en x_0 (resp. à droite, à gauche).

Réciproque fausse

- La fonction valeur absolue est continue en 0, mais n'est pas dérivable en 0.
- Une fonction continue présentant un point anguleux n'est pas dérivable en ce point.

Contraposée du résultat

Si f n'est pas continue en x_0, **alors** f n'est pas dérivable en x_0.

En d'autres termes, on n'ira pas regarder la dérivibalité d'une fonction en un point où elle n'est pas continue.

□

6. Définition de la dérivabilité par développement limité

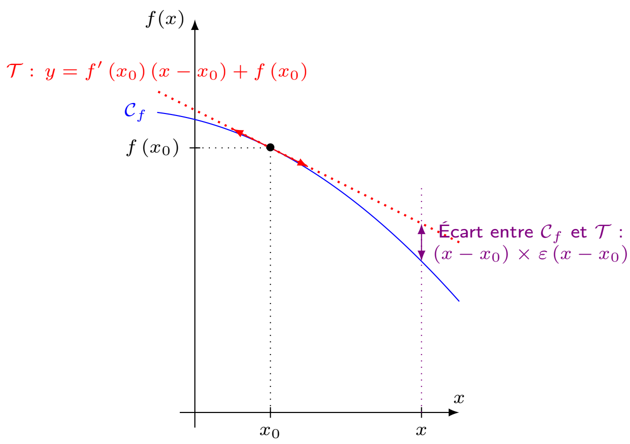
Contexte

Dans tout ce qui suit, sauf mention spécifique :

- I désignera un intervalle non vide non réduit à un point, et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$;
- f sera une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est à dire $f : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$;
- x_0 est un élément de I.

□

Définition 9 – Développement limité d'ordre 1



f est **dérivable** en x_0 si, et seulement si, il existe $\ell \in \mathbb{R}$ et une **fonction** $\varepsilon : V_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un voisinage V_0 de 0 telle que :

$$\forall h \in V_0, \quad f(x_0 + h) = f(x_0) + \underbrace{\ell}_{= f'(x_0)} \times h + h \times \varepsilon(h)$$

avec $\varepsilon(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$

En revenant à x en posant $h = x - x_0$ et en notant V_{x_0} un voisinage de x_0, vient alors :

$$\forall x \in V_{x_0}, \quad f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{Équation de la tangente } \mathcal{T} \text{ à } \mathcal{C}_f \text{ au point d'abscisse } x_0} + (x - x_0) \times \varepsilon(x - x_0) \text{ avec } \varepsilon(x - x_0) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$$

Cette dernière expression est appellée développement limité d'ordre 1 pour f en x_0.

□