AN07

Fonctions continues sur un intervalle

Version du 09-02-2023 à 11:56

Contexte

Dans tout ce chapitre, sauf mention contraire :
- I désignera un intervalle non vide non réduit à un point de $\mathbb{R}$;
- les fonctions considérées seront définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$;
- f désignera une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$.

□

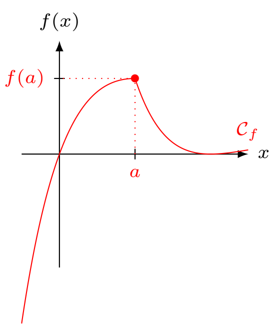
1 . Notion de fonction continue

Définition 1 – Continuité en un point

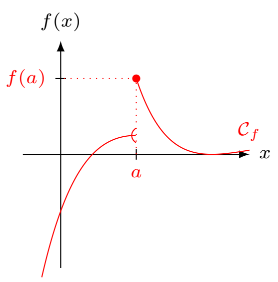
On dit que f **est continue en** a lorsque f admet $f(a)$ pour limite en a .

On dira que f est discontinue en a lorsqu'elle n'est pas continue en a.

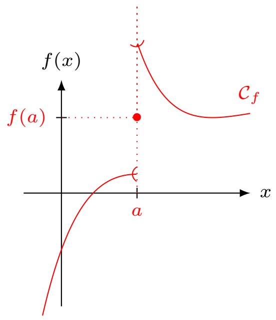
Illustration



f est continue en a



f n'est pas continue en a



f n'est pas continue en a

□

Proposition 1 – Continuité et caractère borné

Si f est continue en a, alors f est bornée au voisinage de a.

□

Éléments de preuve:
C'est une conséquence du fait que f doit dans ce cas avoir une limite finie en a pour être continue...

Théorème 1 – Caractérisation séquentielle de la continuité

$$\left(f \textbf{ est continue en } a\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c}\textbf{pour toute suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ d'éléments de } I \\ \text{qui converge vers } a\text{, on a } f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(a)\end{array}\right)$$

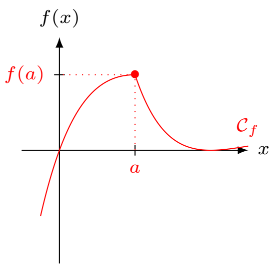
□

Définition 2 – Continuité à gauche et à droite

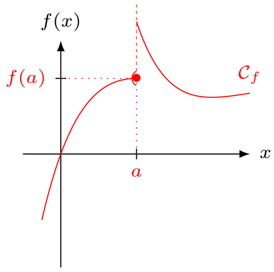
f **est continue à <u>droite</u> en** a lorsque $f(x) \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} f(a)$.

f **est continue à <u>gauche</u> en** a lorsque $f(x) \underset{x\to a^-}{\longrightarrow} f(a)$.

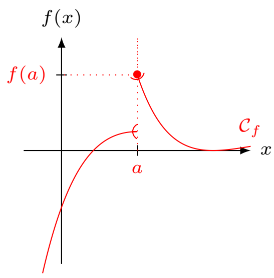
Illustration



f est continue à gauche et à droite en a



f est continue à gauche en a



f est continue à droite en a

□

Théorème 2 – Caractérisation de la continuité par les limites à gauche et à droite

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$ qui n'est pas une borne de I.

$$\left(f \textbf{ est continue en } a\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} f \text{ est continue } \textbf{à gauche} \\ \text{et } \textbf{à droite} \text{ en } a.\end{array}\right)$$

□

a est un point intérieur à I et f est définie en a.

Application| [0728] | 1| Continuité

On considère la fonction f donnée par : $f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$. Cette fonction est-elle continue en 0 ?

□

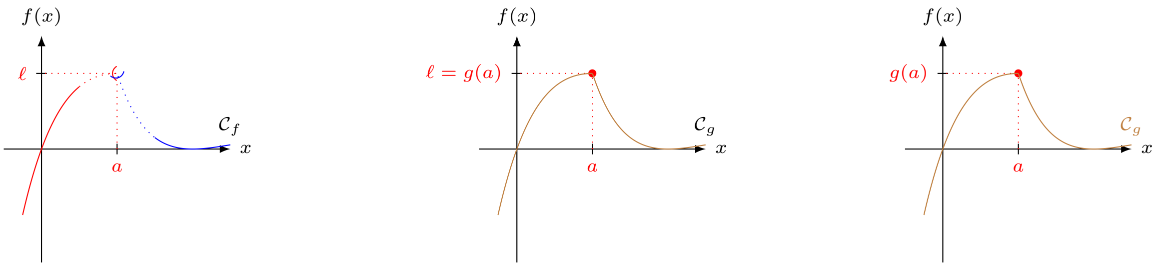
2. Prolongement par continuité

Définition 3 – Prolongement par continuité

On considère $f : \left| \begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$ où $a \in I$ ou une de ses extrémités finie.

On dit que f est prolongeable par continuité en a lorsque f admet une limite finie ℓ en a.

Par suite, la fonction g définie par $g : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) \text{ si } x \neq a \\ \ell \text{ si } x = a \end{cases} \end{array} \right.$ est continue en a, et est appelée le prolongement par continuité de f en a.



f admet une limite à gauche et à droite en a qui sont égales à un réel ℓ.

On construit une fonction g à partir de f en posant $g(a) = \ell$.

La fonction g est alors continue en a.

□

Il s'agit donc « de boucher le trou de $\mathcal{D}_f = I \setminus \{a\}$ en a » en ajoignant à f une valeur qui rende f continue sur $\mathcal{D}_f \cup \{a\} = I$.

Application| [3191] **| 2| Effectuer un prolongement**

Définir, si possible, le prolongement par continuité en 0 des fonctions suivantes :

(1). $f_1 : x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$;

(2). $f_2 : x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$;

(3). $f_3 : x \longmapsto x\ln(x)$;

(4). $f_4 : x :\longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x^2}$.

□

3. Opérations sur les fonctions continues en un point

Proposition 2 – Structure algébrique

Soit $a \in I$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ et $g : I \longmapsto \mathbb{R}$.

- Si f est **continue** en a, alors $|f|$ est **continue** en a.
- Si f et g sont **continues** en a, alors $f + g$ est **continue** en a.
- Si f est continue en a, alors λf est **continue** en a.
- Si f et g sont **continues** en a, alors fg est **continue** en a.
- Si g est **continue** en a et si $g(a) \neq 0$, alors $\dfrac{1}{g}$ est **continue** en a.
- Si f et g sont **continues** en a avec $g(a) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est **continue** en a.

Proposition 3 – Composition et continuité

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $a \in I$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$.
La fonction $g \circ f$ est ainsi bien définie.

Si $\begin{cases} f \text{ est continue en } a \\ g \text{ est continue en } f(a) \end{cases}$,
alors $g \circ f$ est continue en a.

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & J \arrow[r, "g"'] & \mathbb{R} \\
a \arrow[r, dotted] & f(a) \arrow[r, dotted] & g(f(a))
\end{tikzcd}$$

4. Continuité sur un intervalle

Définition 4 – Continuité globale

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

On dit que f **est continue sur** I lorsque f est continue en tout point de l'intervalle I.

On notera alors $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ continues sur I.

Proposition 4 – Opérations algébriques dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$

Les opérations sur les fonctions continues en un point s'étendent à $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ en remplaçant la terminologie « continue(s) en a » par « continue(s) sur I ».
Pour la composition, g doit être continue sur J.

Toutefois, pour la continuité de $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sur I, la fonction g ne doit pas s'annuler sur I.

5 . Image d'un intervalle par une fonction continue

Contexte

Dans tout ce qui suit, a et b désigneront **deux réels de l'intervalle** I tels que $a < b$.

□

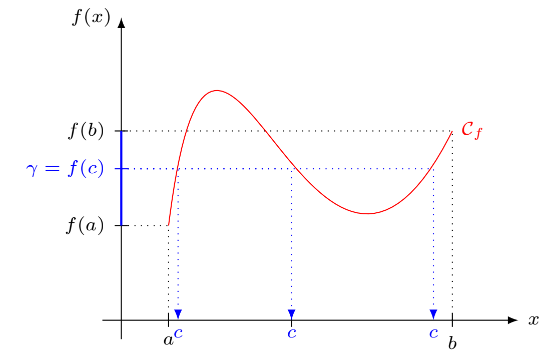
Théorème 3 – Théorème des valeurs intermédiaires dit « TVI »

Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur I telle que $f(a) \leq f(b)$,
alors f atteint toute valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$.

Autrement dit :

$$\forall \gamma \in [f(a); f(b)], \exists c \in [a; b], \quad f(c) = \gamma$$

et il n'y a pas unicité d'un tel c.



Autres formulations

Pour f continue sur $[a; b]$ avec $f(a) \leq f(b)$:

Tout élément de $[f(a); f(b)]$ admet au moins un antécédent par f dans $[a; b]$.

Pour tout $\gamma \in [f(a); f(b)]$, l'équation $f(x) = \gamma$ admet au moins une solution dans $[a; b]$.

De façon plus générale : L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle .

Ordre de $f(a)$ et $f(b)$

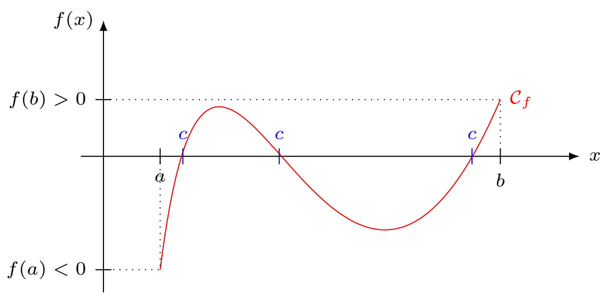
- On pourrait ne pas supposer que $f(a) \leq f(b)$, mais dans ce cas il faudrait considérer γ dans l'intervalle fermé dont les bornes sont $f(a)$ et $f(b)$ écrites dans le bon ordre.
- Dès lors que l'on a $f(a) \neq \gamma$ et $f(b) \neq \gamma$, on peut même préciser que $c \in]a; b[$.

□

Théorème 4 – Théorème des valeurs intermédiaires et zéros d'une fonction

Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I telle que $(a) \neq 0$ et $f(b) \neq 0$ sont de signes opposés .
alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $f(c) = 0$.

On retrouve le résultat très intuitif suivant : « Si f part d'une valeur négative pour atteindre une valeur positive, alors f doit s'annuler entre ces deux valeurs ».



Autre formulation

Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I telle que 0 appartient à l'intervalle d'extrémités $f(a)$ et $f(b)$,
alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins un solution dans $[a; b]$.

□

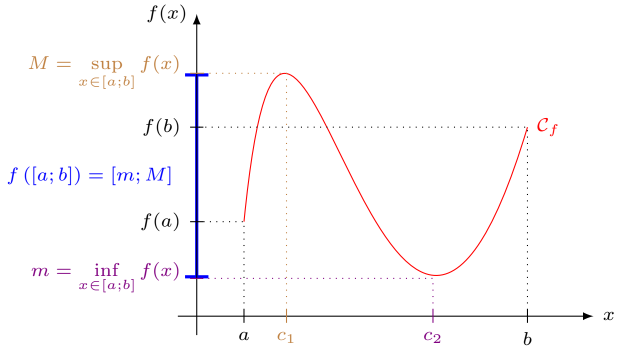
6. Image d'un intervalle $[a, b]$ par une fonction continue

Théorème 5 – Continuité sur un segment - Théorème des bornes atteintes

Si $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $[a;b]$,
alors f est bornée et atteint ses bornes.

On en déduit ainsi que :

$$f([a;b]) = [m;M] \quad \text{où} \quad \begin{cases} m = \inf\limits_{x\in[a;b]} f(x) \\ M = \sup\limits_{x\in[a;b]} f(x) \end{cases}$$



On énonce aussi ce résultat de la façon suivante : l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

□

7. Théorème de la bijection et applications

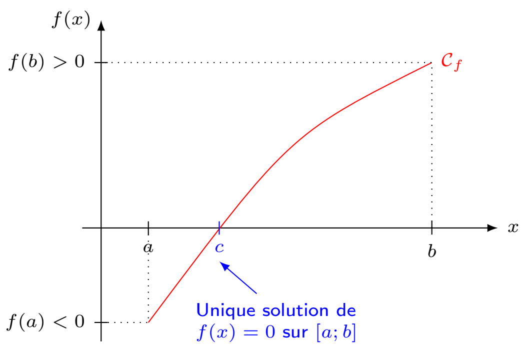
Théorème 6 – TVI - Version strictement monotone - Cas $f(x) = 0$

Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction telle que :

- f est continue sur I ;
- f est strictement monotone sur I ;
- $f(a) \times f(b) < 0$;

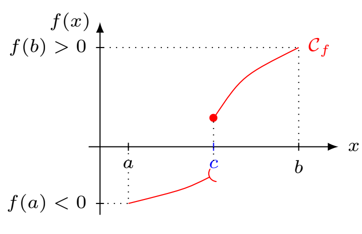
alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]a;b[$.

La relation $f(a) \times f(b) < 0$ est une traduction de « $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés » avec en particulier $f(a) \neq 0$ et $f(b) \neq 0$, qui seraient en fait dans ce cas là, solutions évidentes de $f(x) = 0$.



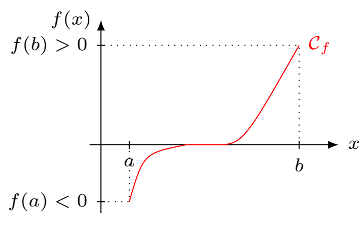
Importance de chacune des hypothèses

Oubli de « f continue sur I »



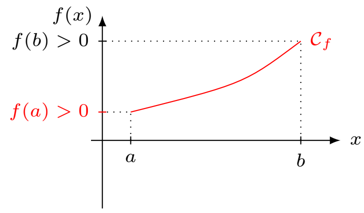
L'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]a;b[$.

Oubli de « f <u>strictement</u> monotone sur I »



L'équation $f(x) = 0$ a une infinité de solutions sur $[a;b]$.

Oubli de « $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés »



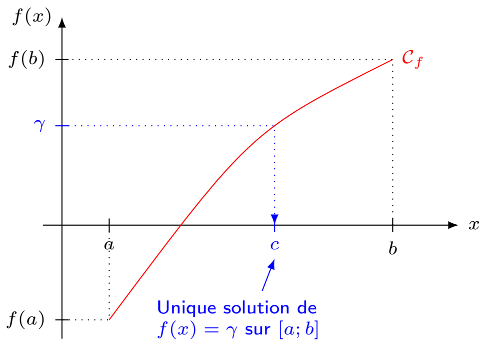
L'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]a;b[$.

TVI - Version strictement monotone - Cas général

Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction telle que :

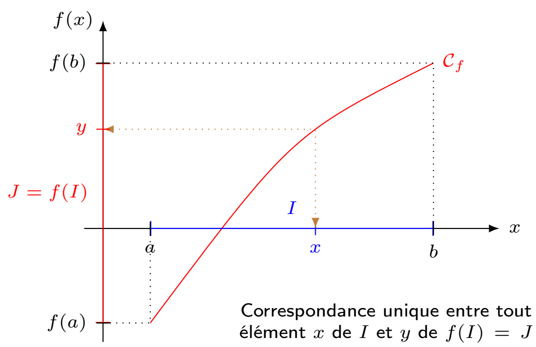
- f est continue sur I ;
- f est strictement monotone sur I ;
- γ est un élément de l'intervalle ouvert dont les bornes sont $f(a)$ et $f(b)$.

alors l'équation $f(x) = \gamma$ admet une unique solution dans l'intervalle $]a; b[$.



□

Théorème 7 – Théorème de la bijection - Version bijection



Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et strictement monotone sur I,
alors f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$.

Cela signifie que tout élément de $J = f(I)$ possédant un unique antécédant par f, on peut construire le processus de « calcul inverse » qui permet de retrouver cet antécédant par f, c'est à dire construire la fonction réciproque notée f^{-1} de f.

De plus, la bijection réciproque $f^{-1} : J \longrightarrow I$ est elle-même continue et strictement monotone, de même monotonie que f.

Continuité et graphe de f^{-1}

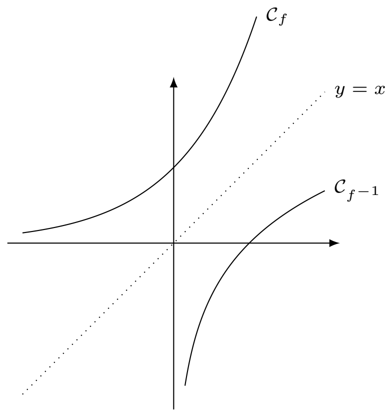
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, et l'on note $\tilde{f}$ la restriction de f à l'intervalle I, c'est à dire $\tilde{f} : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & f(I) \\ x & \longmapsto & \tilde{f}(x) = f(x) \end{array} \right.$.

Si f est **continue** et **strictement monotone** sur I, alors :

- $f(I)$ est un intervalle ;
- $\tilde{f}$ réalise une bijection de I sur $f(I)$;
- $\tilde{f}^{-1}$ est strictement monotone de même sens de variation que f ;
- $\tilde{f}^{-1}$ est continue sur $f(I)$.

Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Si f est impaire, alors f^{-1} est impaire.



□

Application| [2697] | 3| Variations de la fonction réciproque

On donne ci-après le tableau de variations d'une fonction f continue et strictement monotone. Construire alors le tableau de variation de f^{-1}.

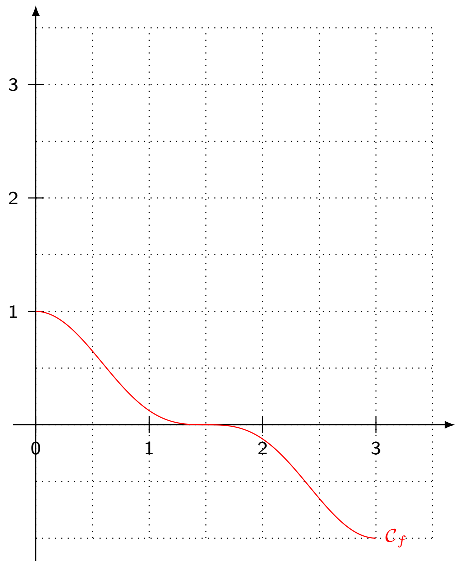
x	-3	2	7	10
Variations de f	-2 ↗	0 ↗	7 ↗	12

x	$-\infty$	-5	0	1
Variations de f	0 ↘	-5 ↘	-10 ↘	$-\infty$

□

Exemple 1 – Construction de représentations graphiques

On donne ci-dessous $\mathcal{C}_f$ pour f continue et strcitement monotone sur un intervalle I.
Construire alors $\mathcal{C}_{f^{-1}}$.



□

Proposition 5 – Réciproque de la fonction tangente

La fonction **tangente** est **continue**, **strictement croissante** sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et réalise donc une **bijection** de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$, elle admet donc une **fonction réciproque** définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

$$\begin{tikzcd} \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\arrow[r, bend left, "\tan"] & \mathbb{R} \arrow[l, bend left, "\arctan"] \end{tikzcd}$$

On appelle **fonction arctangente**, notée $\arctan$, la **fonction réciproque de la fonction tangente** restreinte à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

La fonction **arctangente** est ainsi **définie** sur $\mathbb{R}$ par :

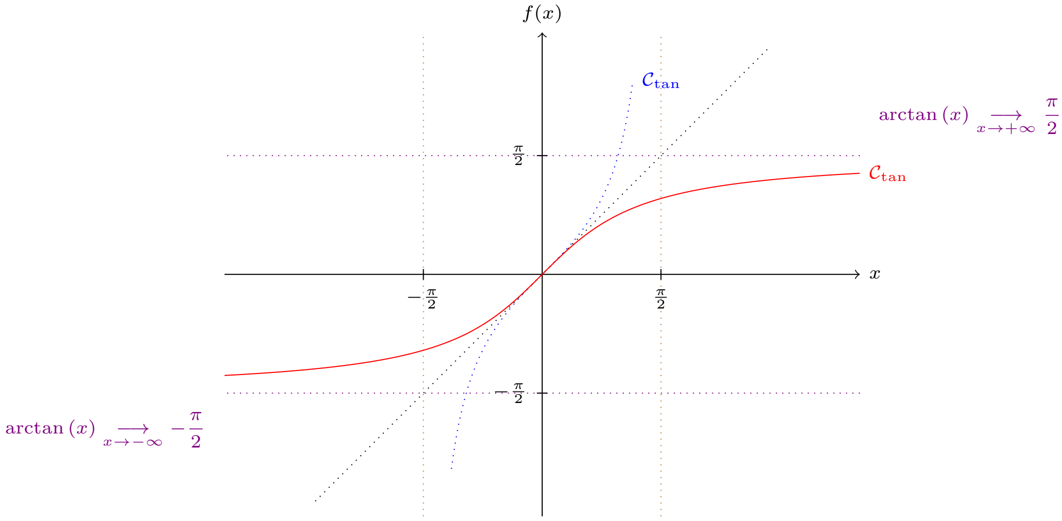
pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $\arctan(x)$ est le réel θ de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan(\theta) = x$

La fonction arctangente est par ailleurs **impaire** : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan(-x) = -\arctan(x)$

Relations de réciprocité

$$\begin{aligned} \forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, &\quad \arctan\left(\tan(\theta)\right)=\theta \\ \forall y \in \mathbb{R}, &\quad \tan(\arctan\left(y\right))=y \end{aligned}$$

Représentation graphique



$\square$