AN06

Calculs de limites

Version du 09-02-2023 à 11:35

1. Formalisation de la notion de limite

Contexte

Le but de ce paragraphe est de définir la notion de « $f(x)$ tend vers ...lorsque x tend vers ... ». Le formalisme présent ici n'est pas un attendu du programme, et peut davatange être vu comme un apport culturel plutôt qu'un contenu exigible.

Dans tout ce qui suit, sauf mention contraire, f désignera une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

$\square$

Définition 1 – Limite FINIE à l'infini

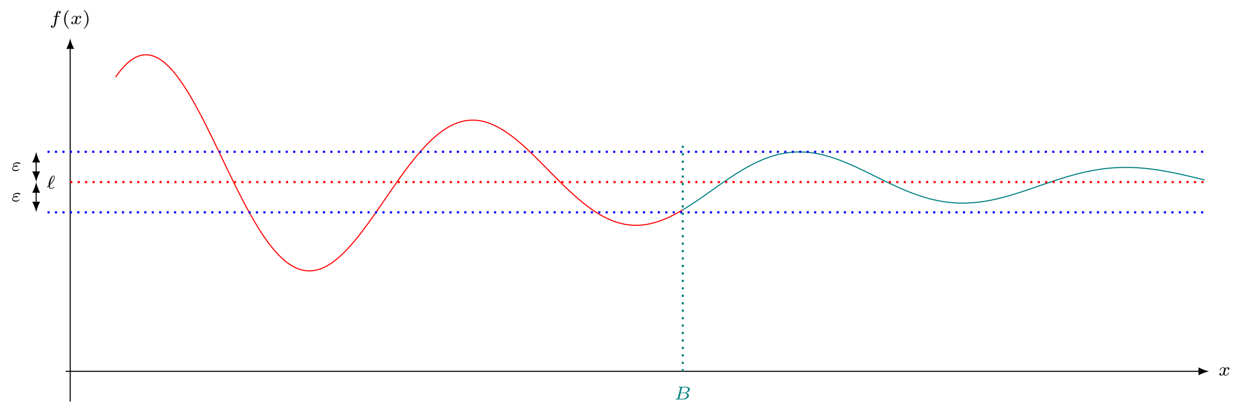
Lorsque $+\infty$ est une borne de I, on dit que f **admet** $\ell \in \mathbb{R}$ **pour limite en** $+\infty$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad x \geq B \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

Lorsque $-\infty$ est une borne de I, on dit que f **admet** $\ell \in \mathbb{R}$ **pour limite en** $-\infty$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad x \leq B \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

Illustration de la définition de la limite en $+\infty$



On notera que la valeur de B à partir de laquelle $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ dépend de ϵ.

Cela signifie, que pour un précision ε donnée, toutes les valeurs de la fonction f sur l'intervalle $[B; +\infty[$ appartiennent à l'intervalle $[\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon]$.

CC BY NC ND

Unicité de la limite et de notation

La limite d'une fonction en $+\infty$ dès lors qu'elle existe, est unique.

Notations

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$

« La limite de la fonction f en $+\infty$ est ℓ »

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$$

« $f(x)$ tend vers le réel ℓ quand x tend vers $+\infty$ »

Ces notations s'adaptent trivialement pour les autres cas de figure.

□

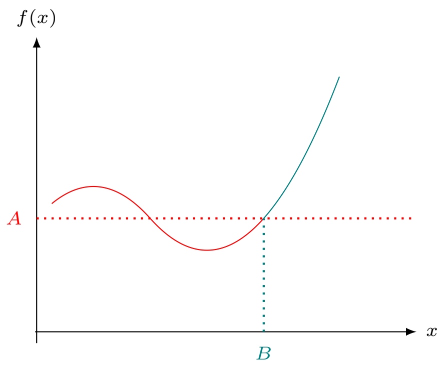
Définition 2 – Limite INFINIE en $+\infty$ ou $-\infty$

Lorsque $+\infty$ est une borne de I, on dit que f **tend vers** $+\infty$ **en** $+\infty$ lorsque :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad x \geq B \Rightarrow f(x) \geq A$$

Lorsque $-\infty$ est une borne de I, on dit que f **tend vers** $+\infty$ **en** $-\infty$ lorsque :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad x \leq B \Rightarrow f(x) \geq A$$



On dit que f **tend vers** $-\infty$ **en** $+\infty$ (respectivement $-\infty$) lorsque la fonction $-f$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$ (respectivement $-\infty$).

Notations

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

« $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ »

$$f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

« $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ »

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

« la fonction f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ »

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

« la fonction f tend vers $+\infty$ en $-\infty$ »

Ces notations s'adaptent trivialement pour les autres cas de figure.

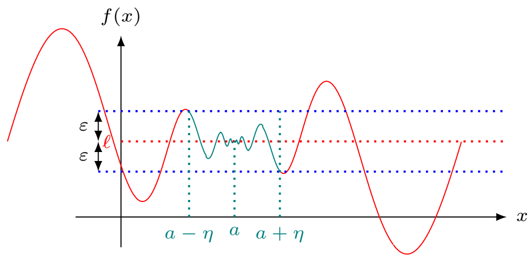
□

Définition 3 – Limite FINIE en un point

On suppose ici que a est un réel appartenant à I ou éventuellement une borne finie de I.

On dit que f **admet** ℓ **pour limite en** a lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, \quad |x-a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$



Unicité de la limite et notations

La limite d'une fonction en a dès lors qu'elle existe, est unique.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$$

« La limite de la fonction f en a est ℓ »

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$$

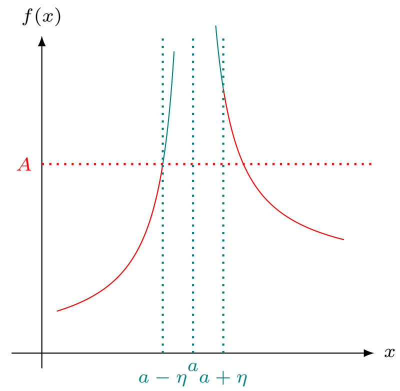
« $f(x)$ tend vers le réel ℓ quand x tend vers a »

$\square$

Définition 4 – Limite INFINIE en un point

On dit que f **admet** $+\infty$ **pour limite en** a lorsque : $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in I, \quad |x-a| \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq A$

On dit que f **admet** $-\infty$ **pour limite en** a lorsque la fonction $-f$ admet $+\infty$ pour limite en a.



Notations

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$$

« $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a »

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

« la fonction f tend vers $+\infty$ en a »

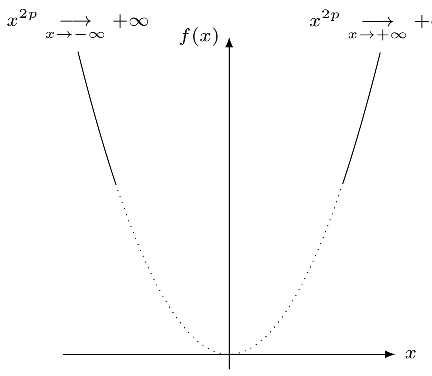
Ces notations s'adaptent trivialement pour les autres cas de figure.

$\square$

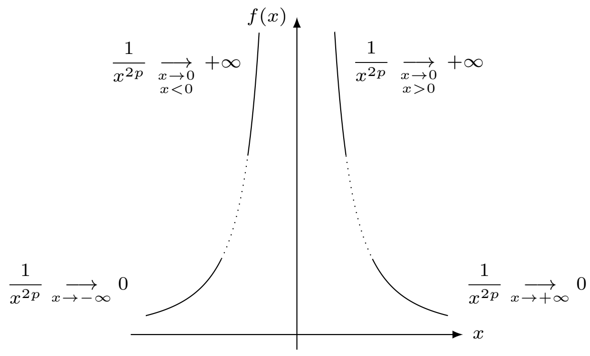
2. Le point sur les limites de références

Proposition 1 – Fonctions $x \longmapsto x^{2p}$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{x^{2p}}$ avec $p \in \mathbb{N}^*$

Limites en $\pm\infty$ de $x \longmapsto x^{2p}$



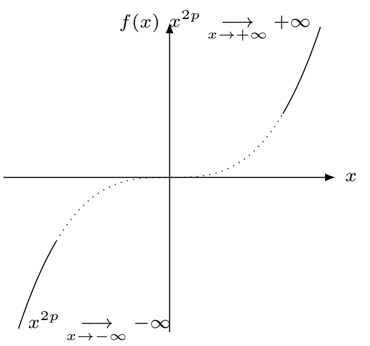
Limites en $\pm\infty$ et en 0 de $x \longmapsto \dfrac{1}{x^{2p}}$



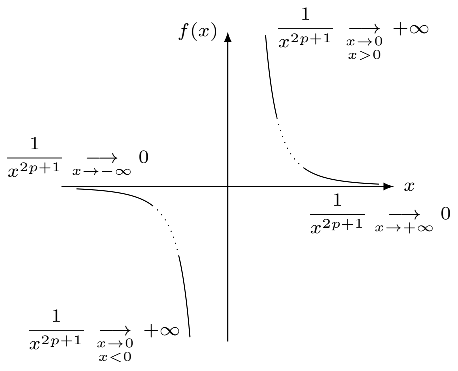
$\square$

Proposition 2 – Limites des fonctions $x \longmapsto x^{2p+1}$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{x^{2p+1}}$ avec $p \in \mathbb{N}$

Limites en $\pm\infty$ de $x \longmapsto x^{2p+1}$



Limites en $\pm\infty$ et en 0 de $x \longmapsto \dfrac{1}{x^{2p}}$



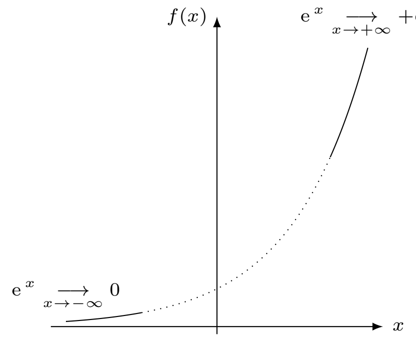
Illustration

$\dfrac{1}{x^5} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \cdots$	$x^7 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \cdots$	$x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \cdots$	$\dfrac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \cdots$
$\dfrac{1}{x} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \cdots$	$\dfrac{1}{x^2} \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} \cdots$	$\dfrac{1}{x^5} \underset{x\to0^-}{\longrightarrow} \cdots$	$\dfrac{1}{x^3} \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} \cdots$

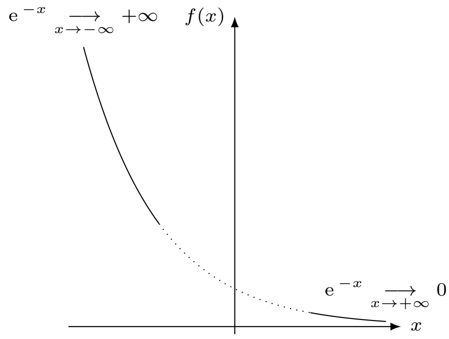
$\square$

Proposition 3 – Autour de la fonction exponentielle

Limites en $\pm\infty$ de $x \longmapsto \mathrm{e}^{x}$



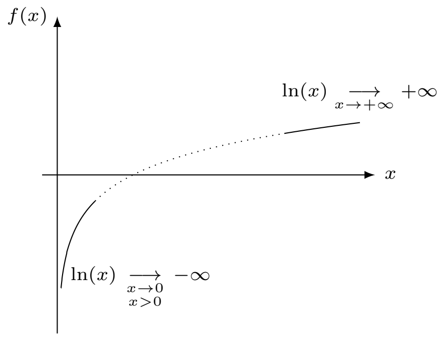
Limites en $\pm\infty$ de $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$



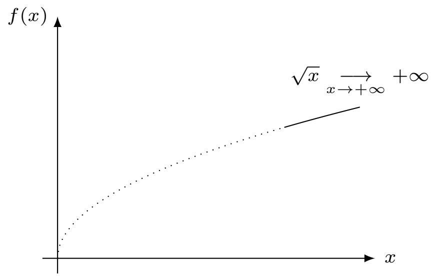
□

Proposition 4 – Fonction $x \longmapsto \ln(x)$ et $x \longmapsto \sqrt{x}$

Limites en 0 et en $+\infty$ de $x \longmapsto \ln(x)$



Limite en $+\infty$ de $x \longmapsto \sqrt{x}$



□

CC BY NC ND

3. Notion de limite à droite et à gauche

Définition 5 – Limite à droite et à gauche

Limite à droite

On dit que f **admet pour limite** ℓ **à droite en** a lorsque la restriction $\tilde{f}$ de f à l'ensemble $I \cap]a;+\infty[$ admet ℓ pour limite en a.

Notation

Avec la même terminologie que précédemment rencontrée, on notera et utilisera les notations suivantes lorsque cela aura du sens

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell \text{ ou } \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \ell$$

$$f(x) \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} \ell \text{ ou } f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x > a}}{\longrightarrow} \ell$$

Limite à gauche

On dit que f **admet pour limite** ℓ **à gauche en** a lorsque la restriction $\tilde{f}$ de f à l'ensemble $I \cap]-\infty;a[$ admet ℓ pour limite en a.

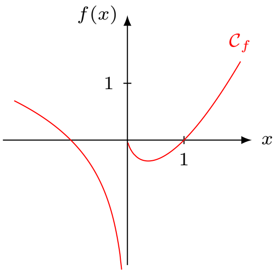
Notation

Avec la même terminologie que précédemment rencontrée, on notera et utilisera les notations suivantes lorsque cela aura du sens

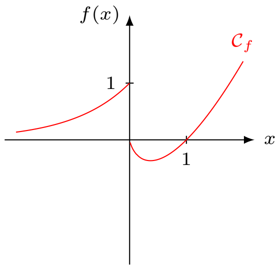
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \ell \text{ ou } \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \ell$$

$$f(x) \underset{x \to a^-}{\longrightarrow} \ell \text{ ou } f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x < a}}{\longrightarrow} \ell$$

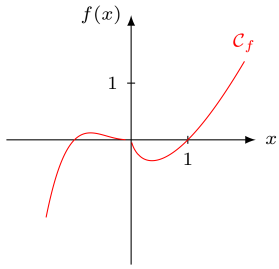
Illustration



f admet une limite à droite en 0, mais pas de limite à gauche en 0.



f admet une limite à gauche et à droite en 0, mais sont différentes.



f admet une limite à gauche et à droite en 0, et qui sont égales.

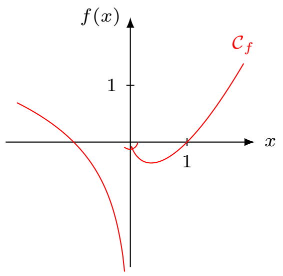
□

Proposition 5 – Lien avec l'existence d'une limite

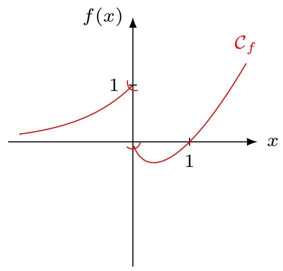
Cas où $\mathcal{D}_f = I \setminus \{a\}$ avec a intérieur à I - f n'est pas définie en a

$$(\ f \textbf{ admet une limite en } a\ ) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{c} f \text{ admet une limite } \textbf{à droite et à gauche en } a \\ \text{avec } \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x). \end{array} \right)$$

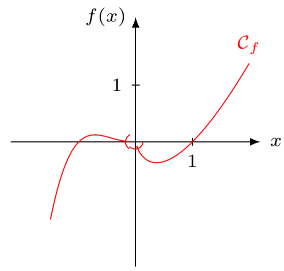
Illustration avec $\mathcal{D}_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$



f admet une limite à droite en 0, mais pas de limite à gauche en 0, donc f ne pourra avoir de limite en 0



f admet une limite à gauche et à droite en 0, mais sont différentes, donc f n'admet pas de limite en 0.



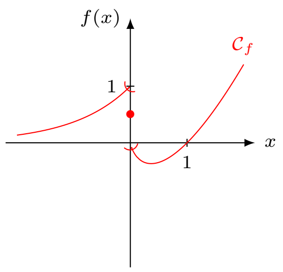
f admet une limite à gauche et à droite en 0, et qui sont égales, donc f admet une limite en 0.

Il s'agit du cas où $\mathcal{D}_f$ possède un « trou »

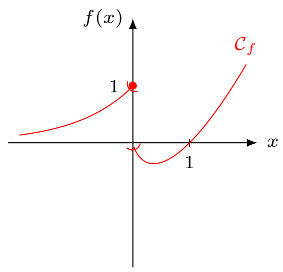
Cas où $a \in I$ - f est d''efinie en a

$$(\ f \textbf{ admet une limite en } a\ ) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{c} f \text{ admet une limite à } \textbf{droite et à gauche en } a \\ \text{avec } \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a). \end{array} \right)$$

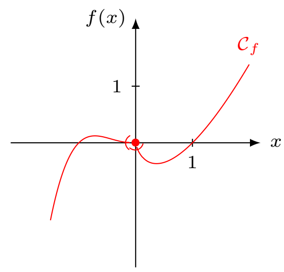
Illustration



f admet une limite à gauche et à droite en 0 et sont toutes les deux différentes de $f(0)$, donc f n'admet pas de limite en 0.



f admet une limite à gauche et à droite. Sa limite à gauche est bien égale à $f(0)$, mais sa limite à droite en 0 étant différente de $f(0)$, on en déduit que f n'admet pas de limite en 0,



f admet une limite à gauche et à droite en 0, et qui sont égales, donc f admet une limite en 0.

□

4. Opérations sur les limites

Théorème 1 – Limite d'une somme, d'un produit et d'un quotient de fonctions

f et g sont deux fonctions définies sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$ et x_0 est un élément de I ou une borne finie ou infinie de I.

Les résultats suivants sont valables, que x tende vers un nombre x_0 ou vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

$f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \dots$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \dots$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$f(x)+g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \dots$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Forme $\infty - \infty$

On garde à l'esprit que $10^{10} - 10^6$ reste un grand nombre, que $10^{10} - 10^{10}$ ne fait pas grand chose, et que $10^6 - 10^{10}$ pose problème si c'est notre compte en banque...

$f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \dots$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\pm\infty$	$\ell \in \mathbb{R}^*$	0
$g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \dots$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$f(x)\times g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \dots$	$\ell\times\ell'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	?

Forme $0 \times \infty$

On garde à l'esprit que $10^{10} \times 10^{-6}$ reste un grand nombre, que $10^{10} \times 10^{-10}$ ne fait pas grand chose, et que $10^6 \times 10^{-10}$ n'est pas vraiment grand...

$f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \dots$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}^*$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \dots$	$\ell' \in \mathbb{R}^*$	$\pm\infty$	0	$\ell \in \mathbb{R}$	$\pm\infty$	0
$\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \dots$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	?	?

Formes $\dfrac{\infty}{\infty}$ et $\dfrac{0}{0}$

On garde à l'esprit que $\dfrac{10^{10}}{10^4}$ ou $\dfrac{10^{-4}}{10^{-10}}$ restent des grands nombres, que $\dfrac{10^5}{10^5}$ ou $\dfrac{10^{-5}}{10^{-5}}$ ne font pas grand chose, et que $\dfrac{10^4}{10^{10}}$ ou $\dfrac{10^{-10}}{10^{-4}}$ ne sont pas vraiment grands...

Quelques résultats portant sur les limites de $f(x)\times g(x)$ ou $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ demandent de connaître au préalable le signe de $f(x)$ et $g(x)$ au voisinage de x_0, de $+\infty$ ou $-\infty$.

Illustration

$-4x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \dots$	$x^3+\dfrac{1}{x^2} \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} \dots$	$-2x^3\sqrt{x} \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} \dots$
$\dfrac{1}{x^2-1} \underset{x\to1^-}{\longrightarrow} \dots$	$\dfrac{2x+1}{-2x^2-x+3} \underset{x\to1^+}{\longrightarrow} \dots$	$x^3+\dfrac{1}{x^5} \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} \dots$
$-2x^2+\dfrac{5}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \dots$	$x+\dfrac{1}{\sqrt{x}} \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} \dots$	$x^2-\dfrac{1}{\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \dots$
$-5x^2\sqrt{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \dots$	$(x^3+1)\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \dots$	$\left(3-\dfrac{2}{x^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \dots$

□

5. Polynômes et quotients de polynômes en $\pm\infty$

Théorème 2 – Limite en $\pm\infty$ d'un polynôme

Soit P un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$: $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

où $a_0, \ldots, a_n$ sont des réels avec $a_n \neq 0$

Alors : $$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad P(x) = a_n x^n \times \underbrace{\left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \times \frac{1}{x} + \frac{a_{n-2}}{a_n} \times \frac{1}{x^2} + \ldots + \frac{a_1}{a_n} \times \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n} \times \frac{1}{x^n}\right)}_{\underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 1}$$

La limite en $+\infty$ (respectivement $-\infty$) de P est donnée par celle de $a_n x^n$, et ces deux limites sont « égales ». □

Point méthode 1 – Limites en $\pm\infty$ d'un polynôme

En **factorisant** par le monôme de plus haut degré du polynôme, on en déduit que le comportement de $P(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ est donné par celui de $a_n x^n$ et ainsi $P(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ldots$

Illustration

$P(x) = -x^3 + x^2 - 2x + 1$ | Limite en $+\infty$

En **factorisant** par le monôme de plus haut degré du polynôme, on en déduit que le comportement de $P(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ est donné par celui de . . . . . .et ainsi $P(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ldots$

$P(x) = -x^3 + x^2 - 2x + 1$ | Limite en $-\infty$

En **factorisant** par le monôme de plus haut degré du polynôme, on en déduit que le comportement de $P(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$ est donné par celui de . . . . . .et ainsi $P(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \ldots$

$P(x) = 4x^3 - 5x^2 + 3x - 1$ | Limite en $+\infty$

En **factorisant** par le monôme de plus haut degré du polynôme, on en déduit que le comportement de $P(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ est donné par celui de . . . . . .et ainsi $P(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ldots$

$P(x) = 4x^3 - 5x^2 + 3x - 1$ | Limite en $-\infty$

En **factorisant** par le monôme de plus haut degré du polynôme, on en déduit que le comportement de $P(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$ est donné par celui de . . . . . .et ainsi $P(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \ldots$

$P(x) = -3x^2 + 4x + 1$ | Limite en $+\infty$

En **factorisant** par le monôme de plus haut degré du polynôme, on en déduit que le comportement de $P(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ est donné par celui de . . . . . .et ainsi $P(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ldots$

$P(x) = -3x^2 + 4x + 1$ | Limite en $-\infty$

En **factorisant** par le monôme de plus haut degré du polynôme, on en déduit que le comportement de $P(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$ est donné par celui de . . . . . .et ainsi $P(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \ldots$

□

Théorème 3 – Limite en $\pm\infty$ d'un quotient de polynômes

Soient P et Q deux polynômes s'écrivant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \underbrace{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}_{\text{avec } a_n \neq 0} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = \underbrace{b_p x^p + b_{p-1}x^{p-1} + \ldots + b_1 x + b_0}_{\text{avec } b_p \neq 0}$$

Pour tout x non nul n'annulant pas Q : $$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n}{b_p x^p} \times \underbrace{\frac{\text{quantité qui tend vers } 1}{\text{quantité qui tend vers } 1}}_{\text{sous-entendu quand } x \text{ tend vers } \pm\infty}$$

La limite en $+\infty$ (respectivement $-\infty$) de $\dfrac{P}{Q}$ est donnée par celle de $\dfrac{a_n x^n}{b_p x^p}$, et ces deux limites sont « égales ».

□

Point méthode 2 – Limites en $\pm\infty$ d'un quotient de polynômes

En **factorisant** par les monômes de plus haut degré des polynômes, on en déduit que le comportement du quotient $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ lorsque x tend vers $+\infty$ est donné par celui de $\dfrac{a_n x^n}{b_p x^p}$ et ainsi $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ldots$

$P(x) = x^2 - 3x + 1 \mid Q(x) = 3x^2 + 2x - 1 \mid$ Limite en $+\infty$

En **factorisant** par les monômes de plus haut degré des polynômes, on en déduit que le comportement du quotient $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ lorsque x tend vers $+\infty$ est donné par celui de … et ainsi $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ldots$

$P(x) = x^2 - 3x + 1 \mid Q(x) = 3x^2 + 2x - 1 \mid$ Limite en $-\infty$

En **factorisant** par les monômes de plus haut degré des polynômes, on en déduit que le comportement du quotient $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ lorsque x tend vers $-\infty$ est donné par celui de … et ainsi $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \ldots$

$P(x) = 3x^3 + x - 1 \mid Q(x) = 4x^2 - 6x + 1 \mid$ Limite en $+\infty$

En **factorisant** par les monômes de plus haut degré des polynômes, on en déduit que le comportement du quotient $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ lorsque x tend vers $+\infty$ est donné par celui de … et ainsi $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ldots$

$P(x) = 3x^3 + x - 1 \mid Q(x) = 4x^2 - 6x + 1 \mid$ Limite en $-\infty$

En **factorisant** par les monômes de plus haut degré des polynômes, on en déduit que le comportement du quotient $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ lorsque x tend vers $-\infty$ est donné par celui de … et ainsi $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \ldots$

$P(x) = x^2 - x - 1 \mid Q(x) = 4x^3 - 3x + 1 \mid$ Limite en $+\infty$

En **factorisant** par les monômes de plus haut degré des polynômes, on en déduit que le comportement du quotient $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ lorsque x tend vers $+\infty$ est donné par celui de … et ainsi $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ldots$

$P(x) = x^2 - x - 1 \mid Q(x) = 4x^3 - 3x + 1 \mid$ Limite en $-\infty$

En **factorisant** par les monômes de plus haut degré des polynômes, on en déduit que le comportement du quotient $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ lorsque x tend vers $-\infty$ est donné par celui de … et ainsi $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \ldots$

□

6 . Limite d'une composée

Remarque 1 – Composition de fonctions

Théorème 4 – Limite d'une composée

Soit $f : I \longrightarrow J$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$. La fonction **composée** $g \circ f$ est donc bien définie.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & J \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Pour a élément de I, borne de I finie ou non

Si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b$ et $g(y) \underset{y \to b}{\longrightarrow} \ell$,

alors $g\left(f(x)\right) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.

Application| [2543] | 1| Composition et limites

Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

Contexte

Dans tout ce qui suit, pour alléger les énoncés qui vont suivre, on notera $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$.

Théorème 5 – Limite et valeur absolue

Si f admet $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ pour limite en a, alors $|f|$ admet $|\ell|$ pour limite en a en convenant que $|\pm\infty| = +\infty$.

Éléments de preuve:
C'est une simple conséquence de la définition de la limite.

Théorème 6 – Image de la limite d'une suite par une fonction

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **une suite d'éléments de** I.

Si $\left\{ \begin{array}{l} u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a \\ \text{et} \\ f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \end{array} \right.$, alors $f(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Éléments de preuve:
C'est une simple conséquence de la définition de la limite d'une fonction et d'une suite.

Application| [3155] | 2| Composition et suites

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général $u_n = \dfrac{2n^2}{n^2+1}$.
Déterminer la limite de la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ dont le terme général est : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \ln(u_n)$.

7. Croissances comparées

Théorème 7 – Croissances comparées

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Prépondérance d'exponentielle sur les puissances en $+\infty$

$$\frac{e^x}{x^n} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

ou encore :

$$x^n e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Prépondérance des puissances sur le logaritme en $+\infty$

$$\frac{\ln(x)}{x^n} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Comparaison du logarithme et des puissances en 0

$$x^n \ln(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$$

□

Dire que $\frac{e^x}{x^n} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ revient à dire que la fonction $x \longmapsto e^x$ est « prépondérante » devant la fonction $x \longmapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ au voisinage de $+\infty$.
Dire que $\frac{\ln(x)}{x^n} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ revient à dire que la fonction $x \longmapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ est « prépondérante » devant la fonction $x \longmapsto \ln(x)$ au voisinage de $+\infty$.

Point méthode 3 – Levée d'une indéterminée du type ∞ sur ∞ ou $\infty - \infty$

Lever une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$

On peut **factoriser** au numérateur et au dénominateur par le terme qui est « prépondérant » devant les autres.

Lever une forme indéterminée du type $\infty - \infty$

On peut **factoriser** la différence par le terme qui est « prépondérant » devant les autres.

□

Application| [2548] | 3| Levée d'indéterminée

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2 - e^x}{x+1}$.

□

8. Existence d'une limite et caractère borné

Définition 6 – Voisinage d'un point

On appelle **voisinage** de :
- $a \in \mathbb{R}$ tout intervalle J de la forme $J =]a-\eta; a+\eta[$ avec $\eta > 0$;
- $+\infty$ tout intervalle J de la forme $J = [B; +\infty[$ avec $B > 0$;
- $-\infty$ tout intervalle J de la forme $J =]-\infty; -B]$ avec $B > 0$.

Il s'agit simplement d'adapter la notion de « à partir d'un certain rang » vue pour une suite, aux fonctions sur le principe « quand on est suffisamment proche de… »

□

Théorème 8 – Caractère borné

Si f admet $\ell \in \mathbb{R}$ pour limite en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, alors f est bornée sur un voisinage de a.

□

Éléments de preuve:
C'est une simple conséquence de la définition de la limite.

Application| [3685] | 4| Limite et encadrement

La fonction $f : \begin{array}{|ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2}{x^2+1} \end{array}$ est-elle bornée au voisinage de $+\infty$?

□

9. Théorèmes d'encadrements

Théorème 9 – Passage à la limite dans une inégalité

On suppose que $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$.

Minoration de la limite

Si au **voisinage de** a on a $f(x) \geq m$,
alors $\ell \geq m$;

Majoration de la limite

Si au **voisinage de** a on a $f(x) \leq M$,
alors $\ell \leq M$;

Conservation de l'ordre

Si au voisinage de a on a $f(x) \leq g(x)$ avec $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell' \in \mathbb{R}$,

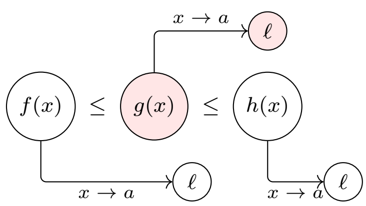
alors $\ell \leq \ell'$.

Contexte

Dans la suite de ce paragraphe, f, g et h désignent trois fonctions à valeurs réelles définies sur l'intervalle I et $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
On suppose que sur un voisinage J de a, on a : $\forall x \in J, \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

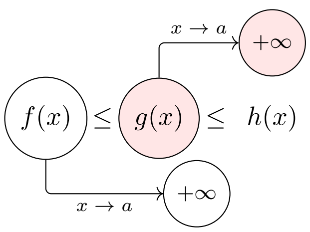
Théorème 10 – Théorème d'encadrement

Si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$ et $h(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$,
alors $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$.

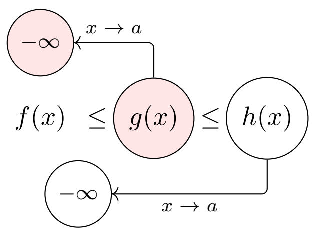


Théorème 11 – Divergence vers $\pm\infty$ par minoration ou majoration

Si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$, **alors** $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$.



Si $h(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty$, **alors** $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty$.



Application| [1884] | 5| Limites et encadrement

f est une fonction telle que, pour tout $x > 1$:

$$\frac{3x + \cos(x)}{x} \leq f(x) \leq \frac{3x+7}{x-1}.$$

f a-t-elle une limite en $+\infty$?

Application| [1883] | **6| Limites**

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $1 \leq 2 - \cos(x) \leq 3$

En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{2-\cos(x)}$.

$\square$

Application| [3156] | **7| Limite et encadrement**

Déterminer la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de $f : x \longmapsto 1 + \dfrac{\sin^2(x)}{x^2}$.

$\square$

Application| [3157] | **8| Limite et encadrement**

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x - 1 \leq x + \sin(x)$.
En déduire la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de $f : x \longmapsto x + \sin(x)$.

$\square$

10 . Théorème de la limite monotone

Théorème 12 – Limite d'une fonction monotone - Cas croissant

On suppose que $I =]a;b[$ avec éventuellement $a = -\infty$ et/ou $b = +\infty$, et on considère $f :]a;b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction **croissante**.

Cas où f est majorée

Si f est **croissante** et **majorée**,
alors f admet **une limite finie en** b, et dans ce cas

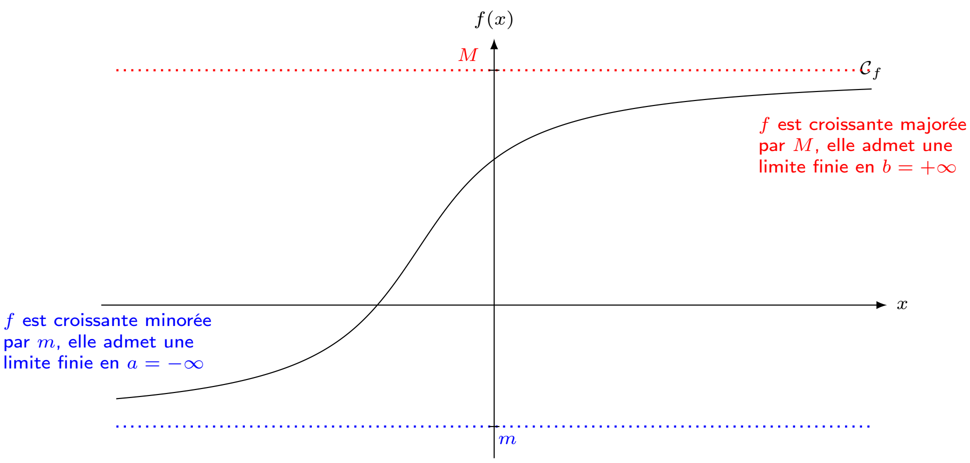
$$\lim_{x \to b} f(x) = \sup_{x \in]a;b[} f(x).$$

Cas où f n'est pas majorée

Si f **croissante** et **n'est pas majorée**,
alors f admet $+\infty$ **pour limite en** b.

On peut aussi s'intéresser à la limite en a de f (voir illustration ci-après).

Illustration avec $a = -\infty$ et $b = +\infty$



Adaptation de l'énoncé pour les fonctions décroissantes

Le théorème précédent s'adapte à la recherche des limites de f en a et b pour f décroissante sur $]a;b[$.

□