AN05

Séries numériques

Version du 09-02-2023 à 10:51

1. Deux exemples à méditer

Introduction – Somme des n premiers termes de deux suites

Pour les deux exemples qui suivent, on s'intéresse à la convergence de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ correspondant à la somme des n premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$, c'est à dire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad S_n = u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

Cas où $u_n = \dfrac{1}{n^2}$

La suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante et montrons que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est majorée.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad S_n &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \\ &\leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \\ &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \\ &= 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &\leq 2\end{aligned}$$

La suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est majorée par 2. D'après le théorème de la limite monotone, $(S_n)_{n\geq 1}$ est une suite convergente.

Cas où $u_n = \dfrac{1}{n}$

La suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est croissante, mais on n'arrive pas à la majorer.

Montrons alors que $(S_n)_{n\geq 1}$ est minorée par une suite qui diverge vers $+\infty$.
On sait que : $\quad \forall x \in \,]1;+\infty[\,,\quad \ln(1+x) \leq x.$

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}\,,\quad S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &\geq \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) \\ &= \ln(n+1)\end{aligned}$$

Or $\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, d'après le théorème de minoration on a $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ diverge vers $+\infty$.

Conclusion

Dans les deux cas, on s'est intéressé à la somme des termes d'une suite numérique qui plus est à termes positifs. Intuitivement le cumul des valeurs des deux suites $(u_n)_{n\geq 1}$ devrait ici tendre vers $+\infty$.

Or ce n'est pas le cas pour la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^2}$.

□

2. Généralités sur les séries numériques

Définition 1 – Notion de série numérique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$.

On appelle série de terme général u_n et on note $\sum u_n$ la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

On dit que S_n est la somme partielle d'indice n de la série $\sum u_n$, et que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appellée la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$.

Extension des définitions

La plupart des définitions et résultats qui suivront seront énoncés pour des séries dont le terme général u_n est défini à partir du rang 0. Tous ces énoncés s'adaptent pour les suites dont le terme général n'est défini qu'à partir d'un certain rang n_0, c'est à dire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles est alors une somme indexée à partir du rang n_0.

□

Exemple 1 – Séries arithmétiques et géométriques

Série arithmétique

Pour la série $\sum n$, la somme partielle d'indice n est :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Série géométrique

Pour la série $\sum q^n$ avec $q \neq 1$, la somme partielle d'indice n est :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Dans les deux cas, on a réussi à trouver l'expression de la somme partielle d'indice n en fonction de n. Ce ne sera malheureusement pas toujours le cas, comme notamment sur les deux premiers exemples rencontrés.

□

Définition 2 – Série convergente et série divergente

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ et $\sum u_n$ la série de terme général u_n.

Série convergente

Lorsque la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$ admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$, on dira que la série $\sum u_n$ est convergente ou tout simplement converge.

Cette limite s'appelle alors la somme de la série $\sum u_n$ et on la note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Série divergente

Lorsque la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$ n'admet pas une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$, on dira que la série $\sum u_n$ est divergente ou tout simplement diverge.

Nature d'une série

Étudier la nature d'une série c'est déterminer si la série converge ou diverge.

Sens des notations

On retiendra notamment que, lorsque tout a du sens :

$$\overbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n}^{\text{Somme de la série}} = \overbrace{\lim_{n\to+\infty} S_n}^{\text{Limite de la suite des sommes partielles}} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$$

☐

Remarque 1 – Sens des notations et objets manipulés

Toutes les notations ont un sens et surtout désignent des objets totalement différents :

$$\underbrace{\sum u_n}_{\text{c'est une suite}} \underset{\text{Par déf.}}{=} \underbrace{(S_n)_{n\in\mathbb{N}}}_{\text{c'est une suite}} \quad \text{alors qu'en cas de convergence :} \quad \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n}_{\text{c'est un nombre}} \underset{\text{Par déf.}}{=} \underbrace{\lim_{n\to+\infty} S_n}_{\text{c'est un nombre}}$$

☐

Point méthode 1 – Étudier la nature d'une série à l'aide de la définition

Pour étudier la nature de la série $\sum u_n$ à partir de la definition :

(1). on cherche une expression en fonction de n de la somme partielle d'indice n de la série.

C'est à dire on « réussit » à écrire : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ $=$ une expression qui dépend de n

(2). on calcule la limite lorsque n tend vers $+\infty$;

(3). on conclut par :

Si $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$, **alors** a série $\sum u_n$ converge ;

Si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **ne converge pas vers un nombre fini,** **alors** la série $\sum u_n$ diverge.

☐

Application| [3798] | 1| Convergence d'une série

La série $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ converge-t-elle ?

☐

Application|[3797]| 2| Convergence et somme d'une série

Étudier la convergence de la série $\sum \mathrm{e}^{-2n}$ et le cas échéant en donner sa somme. □

Proposition 1 – Convergence et premier indice de sommation

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$.
Pour tout $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n_1 \geq n_0$, les deux séries $\sum\limits_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum\limits_{n \geq n_1} u_n$ sont de même nature.

Par contre leurs sommes n'ont pas la même valeur ! □

Éléments de preuve:
La relation de Chasles sur les sommes finies permet d'écrire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > \max(n_0, n_1)$:

$$\overbrace{\sum_{k=n_0}^{n} u_k}^{\substack{\textbf{Somme partielle d'indice } n \\ \textbf{de la série } \sum\limits_{n \geq n_0} u_n}} = \underbrace{\sum_{k=n_0}^{n_1-1} u_k}_{\text{Nombre fini}} + \overbrace{\sum_{k=n_1}^{n} u_k}^{\substack{\textbf{Somme partielle d'indice } n \\ \textbf{de la série } \sum\limits_{n \geq n_1} u_n}}$$

Ainsi, la convergence ou la divergence (au sens suite numérique) de l'un des deux sommes partielles d'indice n des séries $\sum\limits_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum\limits_{n \geq n_1} u_n$ entrainera la convergence ou la divergence de l'autre somme partielle, et par conséquent, les deux séries seront de même nature.

Définition 3 – Reste d'ordre n d'une série

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ et $\sum u_n$ la série de terme général u_n.

Lorsque la série $\sum u_n$ converge, on appelle reste d'indice ou d'ordre n l'élément de $\mathbb{R}$ noté ici R_n défini par :

$$\overbrace{R_n}^{\substack{\textbf{Reste d'indice} \\ n \textbf{ de } \sum u_n}} = \overbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} u_k}^{\substack{\textbf{Somme de la} \\ \textbf{série } \sum u_n}} - \overbrace{\sum_{k=0}^{n} u_k}^{\substack{\textbf{Somme partielle} \\ \textbf{d'indice } n \textbf{ de } \sum u_n}} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

En d'autres termes : $R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots$ □

Proposition 2 – Limite du reste d'ordre n pour une série convergente

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ et $\sum u_n$ la série de terme général u_n.
Si la série $\sum u_n$ est convergente ,
alors le reste d'ordre n de la série $\sum u_n$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

$\square$

Éléments de preuve:
C'est une conséquence directe de la définition du reste :

$$R_n = \underbrace{\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n}_{\substack{\text{nombre fini} \\ \text{car } \sum u_n \text{ converge}}} - \underbrace{\sum_{k=0}^{n} u_k}_{\substack{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \\ \text{car } \sum u_n \text{ converge}}}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

Théorème 1 – Séries grossièrement divergentes

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ et $\sum u_n$ la série de terme général u_n.

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0,
alors la série $\sum u_n$ est divergente .

Une telle série est dite grossièrement divergente .

Éléments de preuve:

Il est immédiat que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

Si la série $\sum u_n$ était convergente et de somme S, on aurait : $\underbrace{\sum_{k=0}^{n} u_k}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S} - \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} u_k}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ce qui est contraire à l'hypothèse faite sur $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Autre formulation du théorème - Mais à oublier !

Ce théorème peut-être énoncé de la façon suivante :
Si la série $\sum u_n$ converge , **alors** la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Ce que l'on retiendra surtout c'est : **Si** $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, **alors** on ne peut rien dire sur la convergence de la série $\sum u_n$.

$\square$

Point méthode 2 – Montrer qu'une série diverge grossièrement

Pour montrer qu'une série diverge grossièrement, on montre que son terme général ne converge pas vers 0.

$\square$

3 . Lien suite-série

Théorème 2 – Suite et série téléscopique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$.

$$\left(\begin{array}{c}\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ \text{converge}\end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c}\text{La série } \sum (u_{n+1}-u_n) \\ \text{converge}\end{array}\right)$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la série $\sum (u_{n+1}-u_n)$ sont de même nature.

En cas de convergence en notant ℓ la limite la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_{n+1}-u_n) = \ell - u_0$$

$\square$

Éléments de preuve:
Un télescopage de termes permet d'écrire simplement que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}-u_k) = u_n - u_0$
Ainsi, la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $\ell \in \mathbb{R}$ entraine la convergence de la série $\sum (u_{n+1}-u_n)$ puisque sa suite des sommes partielles convergera vers $\ell - u_0$.
De même si la série $\sum (u_{n+1}-u_n)$ converge et a pour somme S, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergera vers $S + u_0$.

Application| [3799] | 3| Séries télescopiques

Montrer que la série $\sum \frac{1}{n^2+3n+2}$ est convergente et en calculer sa somme. □

4. Opérations sur les séries

Théorème 3 – Multiplication par un scalaire et convergence

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$.
Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, les deux séries $\sum u_n$ et $\sum (\lambda \times u_n)$ sont de même nature.

En cas de convergence, on aura de plus : $$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda \times u_n) = \lambda \times \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$ □

Éléments de preuve:
C'est une simple conséquence des résultats sur les limites de suites appliqués ici aux suites des sommes partielles.

Exemple 2 – Série harmonique

On a vu que la série $\sum \frac{1}{n}$ appelée série harmonique est divergente.
Ainsi, la série $\sum \frac{\pi}{n}$ est aussi divergente puisque $\frac{\pi}{n} = \pi \times \frac{1}{n}$. □

Théorème 4 – Somme de séries

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de $\mathbb{R}$.

Somme de deux séries convergentes :

Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes,
alors la série $\sum (u_n + v_n)$ est convergente.
En cas de convergence, on aura :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n+v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Somme d'une série convergente et d'une série divergente :

Si la série $\sum u_n$ est convergente et la série $\sum v_n$ est divergente,
alors la série $\sum (u_n + v_n)$ est diverge.

Combinaison linéaire de séries convergentes

On peut résumer les résultats précédents ainsi :

Toute combinaison linéaire de séries convergentes est une série convergente [a]

Ainsi, en cas de convergence de $\sum u_n$ et $\sum v_n$, on peut écrire : $\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + v_n) = \lambda \times \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

On parle alors de linéarité de la somme.

Et pour la somme de deux divergentes ?

La série $\sum \frac{1}{n}$ diverge, ainsi que les séries $\sum \frac{2}{n}$ et $\sum \left(-\frac{1}{n}\right)$.

La série $\sum \left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right)$ qui est en fait la série $\sum \frac{2}{n}$ est donc divergente.

Par contre, la série $\sum \left(\frac{1}{n}+\left(-\frac{1}{n}\right)\right)$ qui est en fait la série $\sum 0$ est convergente.

On ne peut rien dire de la nature d'une série obtenue par somme des termes généraux de deux séries divergentes.

$\square$

a. la terminologie ici est inadaptée. . .il faudrait dire en fait : « toute série dont le terme général est combinaison linéaire de termes généraux de séries convergentes, est une série convergente ».

Éléments de preuve:
C'est une simple conséquence des résultats sur les limites de suites appliqués ici aux suites des sommes partielles.

Application| [3800] | **4**| **Somme de séries**

Étudier la convergence de la série $\sum \frac{\mathrm{e}^{2n}-\mathrm{e}^{n}}{\mathrm{e}^{4n}}$ et en cas de convergence en donner la somme.

$\square$

5. Séries absolument convergentes

Définition 4 – Absolue convergence

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$.

On dit que la série $\sum u_n$ converge absolument ou est absolument convergente lorsque la série $\sum |u_n|$ est convergente.

☐

Exemple 3 – Illustration

La série $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente, puisque la série $\sum \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right|$, qui est en fait la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente.

☐

Théorème 5 – Lien convergence absolue et convergence

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$.

Si la série $\sum |u_n|$ est convergente,

que l'on peut aussi formuler par :

Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente,

alors la série $\sum u_n$ est convergente.

Un mot sur les séries dites « semi-convergentes »

La réciproque de ce théorème est fausse, c'est à dire il existe des séries qui convergent, sans qu'elles convergent absolument[a] : de telles séries sont appelées des séries semi-convergentes. Leur étude dans un cadre général est hors programme.

☐

a. C'est le cas par exemple de $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ qui est une série convergente, mais qui ne converge pas absolument puisque la série $\sum \left|\frac{(-1)^n}{n}\right|$, qui est en fait $\sum \frac{1}{n}$, diverge.

Point méthode 3 – Montrer qu'une série converge par absolue convergence

Pour montrer que $\sum u_n$ converge en utilisant le lien entre absolue convergence et convergence :

- on commence par expliciter le terme général de la série $\sum |u_n|$, c'est à dire $|u_n|$;
- on établit la convergence de la série $\sum |u_n|$;
- on concluera par une affirmation semblable à :
  « Puisque la série $\sum |u_n|$ converge, la série $\sum u_n$ est absolument convergente, donc parthéorème est convergente »

☐

Théorème 6 – Majoration de la somme d'une série absolument convergente - Inégalité triangulaire

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$.

Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors on a :

$$\underbrace{\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|}_{\text{Inégalité triangulaire pour les séries}}$$

☐

6. Autour des séries géométriques

Définition 5 – Série géométrique

Soit $q \in \mathbb{R}$. La série $\sum q^k$ est appelée série géométrique de raison q. □

Théorème 7 – Critère de convergence pour les séries géométriques

$$\left(\text{La série } \sum q^n \text{ converge}\right) \quad \Leftrightarrow \quad (|q| < 1)$$

Somme d'une série géométrique convergente

Si $|q| < 1$, alors pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=m}^{+\infty} q^k = q^m \times \frac{1}{1-q} \underset{\text{que l'on retient par}}{=} \text{premier terme de la somme} \times \frac{1}{1-q}$$

Rappel sur les sommes des termes d'une suite géométrique

Soient $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m < n$ et soit $q \in \mathbb{R}$.

- Si $q{=}1$, alors $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} q^k = n - m + 1$.
- Si $q{\neq}1$, alors $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} q^k = q^m \times \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q}$

□

Éléments de preuve: C'est une simple conséquence du fait que la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, $|q| < 1$ appliqué à la suite des sommes partielles de la série géométrique $\sum q^n$.

Proposition 3 – Séries géométriques dérivées

Les deux séries $\sum nq^{n-1}$ et $\sum n(n-1)q^{n-2}$ convergent si, et seulement si, $|q| < 1$.

Somme de la série géométrique dérivée

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

Somme de la érie géométrique dérivée seconde

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

□

7. Autour des séries de Riemann

Définition 6 – Forme des séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
Toute série de la forme $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est appelée série de Riemann de paramètre α.

Illustration

$\sum \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n}$ sont des séries de Riemann de paramètres respectifs 2 et 1.
De même $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ en est une puisque $\sqrt{n} = n^{\frac{1}{2}}$.

□

Théorème 8 – Critère de convergence pour les séries de Riemann

$$\left(\text{La série } \sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ est convergente}\right) \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha > 1)$$

Illustration

La série $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ est une série convergente car c'est une série de Riemann de paramètre $\alpha = \frac{3}{2} > 1$ puisque $n\sqrt{n} = n^{\frac{3}{2}}$

La série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de divergente car c'est une série de Riemann de paramètre $\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$.

□

8. Critères de convergence pour les séries à termes positifs

Définition 7 – Série à termes positifs

On appelle série à termes positifs toute série $\sum u_n$ dont le terme général u_n est un réel positif.

□

Théorème 9 – Croissance et convergence de la suite des sommes partielles

Croissance de la somme partielle

La suite des sommes partielles d'une série à termes positifs est une suite croissante minorée par 0.
Lorsqu'une telle série ne converge pas, sa suite des sommes partielles diverge vers $+\infty$.

Éléments de preuve:
En notant $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de $\sum u_n$, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\quad S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \underbrace{u_{n+1} \geq 0}_{\text{par hypothèse}}$ donc la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, clairement minorée par 0 comme somme de termes positifs.

Critère de convergence par majoration de la somme partielle

$$\left(\begin{array}{c}\text{Une série à termes}\\ \text{positifs converge}\end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c}\text{La suite de ses}\\ \text{sommes partielles}\\ \text{est majorée}\end{array}\right)$$

Éléments de preuve:
C'est une simple conséquence du théorème de la limite monotone appliqué à la suite des sommes partielles de $\sum u_n$, où l'on sait qu'une suite croissante converge si, et seulement si, elle est majorée.

□

Point méthode 4 – Montrer la convergence/divergence à partir de la suite de sommes partielles

Pour étudier une série à termes positifs $\sum u_n$ à partir de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles, on peut de...

Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée

On essaie de déterminer un réel $M > 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} u_k \leq M$$

pour conclure à la convergence de $\sum u_n$ en affirmant que : *$\sum u_n$ étant une série à termes positifs dont la suite des sommes partielles est majorée.*

Minorer $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par une suite qui diverge vers $+\infty$

On essaie de déterminer une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \\ \text{et } w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \end{cases}$$

pour conclure à la divergence de $\sum u_n$ en affirmant que : *$\sum u_n$ étant une série à termes positifs dont la suite des sommes partielles diverge vers $+\infty$*

□

9. Théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs

Théorème 10 – Majoration par une série convergente

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs et $n_0 \in \mathbb{N}$.

Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite telle que $\begin{cases} \forall n \geq n_0, \quad 0 \leq u_n \leq v_n \\ \text{La série } \sum v_n \text{ est converge} \end{cases}$, **alors** la série $\sum u_n$ est convergente.

□

Éléments de preuve:
Puisque par hypothèse : $\forall n \geq n_0, 0 \leq u_n \leq v_n$

il vient par sommation a que : $\forall n \geq n_0, \quad 0 \leq \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} u_k \leq \sum_{k=n_0}^{n} v_k$

Or par hypothèse $\sum v_n$ est une série à termes positifs qui converge. Sa suite des sommes partielles est donc majorée par un réel M.

Ainsi, on a : $\forall n \geq n_0, \quad 0 \leq \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} u_k \leq M$

Par conséquent $\sum u_n$ est une série à termes positifs dont la suite des sommes partielles est majorée. Elle converge donc.

Théorème 11 – Minoration par une série divergente

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs et $n_0 \in \mathbb{N}$.

Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite telle que $\begin{cases} \forall n \geq n_0, \quad 0 \leq v_n \leq u_n \\ \text{La série } \sum v_n \text{est divergente} \end{cases}$, alors la série $\sum u_n$ est divergente.

□

Éléments de preuve: Puisque par hypothèse : $\forall n \geq n_0,\, 0 \leq u_n \leq v_n$

il vient par sommation a que : $\forall n \geq n_0, \quad 0 \leq \sum_{k=n_0}^{n} v_k \leq \sum_{k=n_0}^{n} u_k$

Or $\sum v_n$ est une série à termes positifs qui diverge. Sa suite des sommes partielles diverge donc vers $+\infty$, et il en est alors de même pour celle de $\sum u_n$. Par conséquent $\sum u_n$ est une série à termes positifs dont la suite des sommes partielles est divergente. Elle diverge donc.

Point méthode 5 – Utiliser les théorèmes de minoration/majoration sur un encadrement $0 \leq u_n \leq v_n$ ou $0 \leq v_n \leq u_n$

Pour montrer que la série à termes positifs $\sum u_n$ converge ou diverge, on peut essayer de :

Majorer u_n par le terme général d'une série convergente

On cherche $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\begin{cases} \forall n \geq n_0, \quad 0 \leq u_n \leq v_n \\ \text{La série } \sum v_n \text{est converge} \end{cases}$$

et conclure à la convergence par : « *le terme général de la série à termes positifs $\sum u_n$ étant majorée par celui d'une série convergente, la série $\sum u_n$ converge* »

Minorer u_n par le terme général d'une série divergente

On cherche $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\begin{cases} \forall n \geq n_0, \quad 0 \leq v_n \leq u_n \\ \text{La série } \sum v_n \text{est divergente} \end{cases}$$

et conclure à la convergence par : « *le terme général de la série à termes positifs $\sum u_n$ étant minoré par celui d'une série divergente, la série $\sum u_n$ diverge* »

On dit que l'on utilise dans ce cas le théorème de comparaison des séries à termes positifs.

□

Application| [3803] **| 5| Nature d'une série par comparaison**

Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{2}{n^3+1}$.

□

10 . Règle de d'Alembert

Théorème 12 – La règle de d'Alembert

On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes strictement positifs.

Cas de convergence

Si on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \underset{\in\mathbb{R}}{\ell} < 1$,
alors la série $\sum u_n$ converge.

Cas de divergence

Si on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \underset{\in\mathbb{R}}{\ell} > 1$ ou que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$,
alors la série $\sum u_n$ diverge et la divergence est même grossière.

On ne peut rien dire lorsque $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Cas « intéressant »d'utilisation

On utilise régulièrement le critère de d'Alembert lorsque le terme général de $\sum u_n$ conduit à de « bonnes » simplification du quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

□

Point méthode 6 – Utilisation de la règle de d'Alembert pour étudier la convergence d'une série

Pour étudier la convergence d'une série $\sum u_n$ à termes strictement positifs à l'aide de la règle de d'Alembert :

- on explicite le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$;
- on détermine la limite du quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ par tous les moyens connus ;
- on conclut par :
  Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell < 1$, alors la série est convergente ;
  Si on trouve tout autre chose pour la limite de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, alors la série est divergente dès lors que $\ell > 1$ notamment.

On veillera à faire apparaître dans notre rédaction un justification semblable à :

« *Puisque* $\sum u_n$ *est une série à termes strictement positifs avec* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dots$, *on en déduit par le critère de d'Alembert que* $\sum u_n \dots$ »

□

Application| [3808] | 6| Convergence par d'Alembert

Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{n^4}{3^n}$.

□

Théorème 13 – Série exponentielle

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ est une série convergente, et on a : $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$

On parle alors de la série exponentielle.

□

Éléments de preuve:

11 . Comparaison aux séries usuelles

Théorème 14 – Règle du $n^\alpha u_n$

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

Convergence à l'aide de $n^\alpha u_n$

Si il existe $\alpha > 1$ tel que la suite $(n^\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, alors la série $\sum u_n$ est convergente.

On utilisera en particulier ce résultat en montrant que $n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$ puisque l'on sait qu'une suite convergente est nécessairement bornée.

Éléments de preuve:

Divergence à l'aide de $n^\alpha u_n$

Si il existe $\alpha \leq 1$ tel que la suite $(n^\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}^* \cup \{\pm\infty\}$, alors la série $\sum u_n$ est divergente.

Convergence à l'aide de $q^n u_n$

Si il existe $q > 1$ tel que la suite $(q^n u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, alors la série $\sum u_n$ est convergente.

On utilisera en particulier ce résultat en montrant que $q^n u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$ puisque l'on sait qu'une suite convergente est nécessairement bornée.

□

Exemple 4 – Utilisation de la règle du $n^\alpha u_n$

On considère les séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$ dont les termes généraux sont donnés par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{rcl} u_n & = & \dfrac{\mathrm{e}^{-n}}{\sqrt{n}} \\ v_n & = & \dfrac{\mathrm{e}^{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{n}} \\ w_n & = & \mathrm{e}^{-n^2} \ln(n) \end{array} \right.$$

Étude de la convergence de $\sum u_n$

Étude de la convergence de $\sum v_n$

Étude de la convergence de $\sum v_n$

□

12. Théorèmes de convergence aux frontières du programme

Théorème 15 – Critère d'équivalence | Rappel : notion de suites équivalentes non explicitement au programme

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont telles que $\begin{cases} \forall n \geq n_0, u_n \geq 0 \\ u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \end{cases}$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature. □

Éléments de preuve: Puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, on a $\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et u_n et v_n de même signe, donc ici toutes les deux positives.

Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0,\ \frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq 2$.

Ainsi : $\forall n \geq n_0,\ 0 \leq \frac{1}{2} v_n \leq u_n \leq 2v_n$.

Par suite :

Si $\sum v_n$ est divergente alors par le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ est divergente puisque : $\forall n \geq n_0,\ 0 \leq \frac{1}{2} v_n \leq u_n$.

Si $\sum v_n$ est convergente alors par le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ est convergente puisque : $\forall n \geq n_0,\ 0 \leq u_n \leq 2v_n$.

Point méthode 7 – Étudier la nature d'une série par équivalence

Pour étudier la convergence d'une série à termes positifs $\sum u_n$, à l'aide du critère d'équivalence :

- on cherche une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$;
- on étudie la convergence de la série $\sum v_n$.
- on conclut quand à la convergence de $\sum u_n$ par :

  Si $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge.

  Si $\sum v_n$ diverge, alors la série $\sum u_n$ diverge.

On veillera à faire apparaître dans notre rédaction un justification semblable à :
« *Puisque $\sum u_n$ est une série à termes positifs avec $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et que $\sum v_n$ est une série …, on en déduit par le critère d'équivalence des séries à termes positifs que $\sum u_n$ …* » □

Application | [3806] | 7 | Convergence par équivalence

Déterminer la nature de la série $\sum \left(n\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$. □

Application| [3807] | 8| Convergence par équivalence

Déterminer la nature de la série $\sum \left(\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1\right)\right)$.

☐

Théorème 16 – Prépondérance et convergence | Rappel : notion de suites prépondérantes non explicitement au programme

Ce résultat est clairement hors-programme tel qu'énoncé ci-après. Toutefois, il ne fait que mobiliser des résultats et des notions déjà rencontrées.

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries telles que $\begin{cases} u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \\ \sum v_n \text{ est absolument convergente} \end{cases}$, alors la série $\sum u_n$ est convergente

☐

Éléments de preuve:
En effet, dire que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ (ou que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$) signifie que le quotient $\frac{u_n}{v_n}$ est borné c'est à dire qu'il existe un réel M et un entier n_0 tels que : $\forall n \geq n_0, \left|\frac{u_n}{v_n}\right| \leq M$.
Par suite : $\forall n \geq n_0,\ 0 \leq |u_n| \leq M \times |v_n|$
Comme par hypothèse la série $\sum v_n$ est absolument convergente, d'après le théorème de comparaison pour les séries numériques, on en déduit que la série $\sum |u_n|$ est convergente, c'est à dire que la série $\sum u_n$ est absolument convergente donc par théorème est convergente.

Mise en garde

Ce résultat n'est pas un théorème ! Il s'agit simplement d'exploiter les définitions des relations de comparaison entre les suites. On effectuera ainsi à chaque fois ce raisonnement, en l'adaptant de façon pertinente à la situation [a].

a. en effet, dès lors que $\sum u_n$ est à termes positifs, on pourra se passer de l'argument de l'absolue.

13 . Un mot sur les séries doubles

Théorème 17 – Permutation de $\sum$

Si $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ une suite de termes positifs à deux indices, alors $\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j}$.

☐

On utilise la convention $+\infty + a = +\infty$ avec $a \in \mathbb{R}$.