AN04

Comparaison de suites

Version du 31-10-2022 à 11:32

Contexte

Dans tout ce chapitre, sauf mention contraire, on désigne par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **ne s'annule pas** à partir d'un certain rang n_0, où $n_0 \in \mathbb{N}$.

On rappelle que l'on utilise la notation $\overline{\mathbb{R}}$ pour désigner $\mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$.

Pourquoi cette hypothèse ?

La suite dont le terme général est $\dfrac{u_n}{v_n}$ qui est donc bien défini à partir du rang n_0.

□

1 . Négligeabilité et prépondérance

Définition 1 – Prépondérance ou négligeabilité

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est négligeable devant** $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque :

$$\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Notation

$$u_n = o(v_n)$$

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$$

Autre mode de définition

$u_n = o(v_n)$ lorsqu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\forall n \geq n_0,\ u_n = v_n \times \underbrace{\varepsilon_n}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

Illustration

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n$
$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = n^2$

On a clairement que $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Donc $u_n = o(v_n)$.

$(u_n)_{n\geq 1}$ donnée par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{n}$

$(v_n)_{n\geq 1}$ donnée par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{1}{n^2}$

On a clairement que $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Donc $v_n = o(u_n)$.

□

Application| [3122] **| 1| Établir une négligeabilité**

Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ deux suites réelles de termes généraux :

$$u_n = n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \qquad \text{et} \qquad v_n = n$$

Montrer que $u_n = o(v_n)$.

□

Application| [3141] **| 2| Prépondérance**

Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ deux suites dont les termes généraux sont :

$$u_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{1}{n^2}$$

A-t-on $u_n = o(v_n)$ ou $v_n = o(u_n)$?

□

Application| [3144] | 3| Prépondérance et limites

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite de terme général $u_n = \left(1 - \frac{3}{2}\frac{\ln(n)}{n}\right)^n$.

On admet que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 - \frac{3}{2}\frac{\ln(n)}{n} \geq 0.$

On rappelle que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 - x \leq \mathrm{e}^{-x}.$

(1). Montrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

(2). En déduire que $u_n = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

□

Proposition 1 – Transitivité et prépondérance | Pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites

Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$

Éléments de preuve: $\frac{u_n}{w_n} = \underbrace{\frac{u_n}{v_n}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \times \underbrace{\frac{v_n}{w_m}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$

□

Proposition 2 – Caractérisation des suites de limite nulle

$$\underset{\substack{\text{où } 1 \text{ désigne} \\ \text{la suite constante égale à } 1}}{(u_n = o(1))} \Leftrightarrow \left(u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\right)$$

Éléments de preuve: Il est équivalent de dire que $\frac{u_n}{1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

□

Théorème 1 – Échelle de comparaison en $+\infty$ | Pour $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\gamma > 0$

$$(\ln(n))^\beta \underset{n\to+\infty}{=} o(n^\alpha)$$

$$n^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} o(\mathrm{e}^{\gamma n})$$

$$\mathrm{e}^{-\gamma n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

□

2. Suites équivalentes

Définition 2 – Suites équivalentes

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque :

$$\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

Notation

$$u_n \sim v_n$$

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$$

Autre mode de définition

$u_n \sim v_n$ lorsqu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\forall n \geq n_0,\ u_n = v_n \times \underbrace{(1 + \underbrace{\varepsilon_n}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0})}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1}$$

Illustration

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n^2 + 1$
$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = n^2$

On a clairement que $\dfrac{u_n}{v_n} = 1 + \dfrac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

Donc $u_n \sim v_n$.

$(u_n)_{n\geq 1}$ donnée par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{n^2 - n}$

$(v_n)_{n\geq 1}$ donnée par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{1}{n^2}$

On a clairement que $\dfrac{v_n}{u_n} = 1 - \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

Donc $v_n \sim u_n$.

□

Application| [3142] | 4| Comparer deux suites

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\geq 2}$ les deux suites de termes généraux respectifs :

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{1}{n^2}$$

Montrer que $u_n \sim v_n$.

□

Application| [3143] | 5| Comparer deux suites

Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ les deux suites de termes généraux respectifs :

$$u_n = \ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right) \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{3}{n^2}$$

(1). A-t-on $u_n \sim v_n$?

(2). Proposer alors un équivalent pour u_n.

□

Proposition 3 – Transitivité et équivalence | Pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites

Si $u_n \sim v_n$, alors $v_n \sim u_n$.

Éléments de preuve: $\frac{v_n}{u_n} = \frac{1}{\underbrace{\frac{u_n}{v_n}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1}}$

Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$, alors $u_n \sim w_n$.

Éléments de preuve: $\frac{u_n}{w_n} = \underbrace{\frac{u_n}{v_n}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1} \times \underbrace{\frac{v_n}{w_n}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1}$

□

Théorème 2 – Équivalence et négligeabilité | Pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites

$$(u_n \sim v_n) \quad \Leftrightarrow \quad (u_n - v_n = o(v_n))$$

Éléments de preuve: $\underbrace{\frac{u_n - v_n}{v_n}}_{\substack{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ si} \\ u_n - v_n = o(v_n)}} = \underbrace{\frac{u_n}{v_n}}_{\substack{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \text{ si} \\ u_n \sim v_n}} -1$

□

Théorème 3 – Transfert du signe par équivalence | Pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites

Si $u_n \sim v_n$, alors u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

Par ailleurs Puisque par hypothèse v_n est non nul à partir d'un certain rang, il en sera de même pour u_n.

Éléments de preuve: $\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc le quotient $\frac{u_n}{v_n}$ est positif à partir d'un certain rang.

□

3. Équivalents usuels

Proposition 4 – Polynômes et équivalents

Pour $a_p \neq 0$ et $p \in \mathbb{N}$

$$a_p n^p + a_{n-1} n^{p-1} + \ldots + a_0 \underset{n \to +\infty}{\sim} a_p n^p$$

Illustration

$$2n^3 - n^2 + n - 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} 2n^3$$

Pour $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$ et $(p, q) \in \mathbb{N}^2$

$$\frac{a_p n^p + a_{n-1} n^{p-1} + \ldots + a_0}{b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \ldots + b_0} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{a_p}{b_q} n^{p-q}$$

Illustration

$$\frac{3n^2 - n + 1}{-2n^3 - n + 1} \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{3}{2n}$$

Retour sur un résultat connu

On retrouve un résultat comparable avec celui rencontré dans le cadre des calculs de limites en $\pm\infty$ pour les polynômes et quotient de polynômes, à savoir que l'on s'intéresse au monôme de plus haut degré dans ce cas.

□

Théorème 4 – Équivalents usuels | Pour $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

$$e^{u_n} - 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n$$

$$\ln(1 + u_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n$$

$$(1 + u_n)^\alpha - 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} \alpha u_n$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\sin(u_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n$$

$$1 - \cos(u_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{u_n^2}{2}$$

$$\tan(u_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n$$

□

Exemple 1 – Manipuler les équivalents usuels

?

Déterminer un équivalent simple des suites $(u_n)_{n \geq 1}$ dont les termes généraux sont :

$$u_n = \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1$$

$$u_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right);$$

$$u_n = e^{\frac{1}{\ln(n)}} - 1;$$

□

4. Compatibilité de l'équivalence avec certaines opérations

Proposition 5 – Opérations sur les équivalents | Sous réserve que ces notations aient du sens

Multiplication par un réel $\lambda \neq 0$

Si $u_n \sim v_n$, alors $\lambda u_n \sim \lambda v_n$.

Éléments de preuve:

$$\frac{\lambda u_n}{\lambda v_n} = \frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

Produit de suites

Si $\begin{cases} u_n \sim a_n \\ \text{et} \\ v_n \sim b_n \end{cases}$, alors $u_n \times v_n \sim a_n \times b_n$.

Éléments de preuve:

$$\frac{u_n \times v_n}{a_n \times b_n} = \underbrace{\frac{u_n}{a_n}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1} \times \underbrace{\frac{v_n}{b_n}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

Quotient de suites

Si $\begin{cases} u_n \sim a_n \\ \text{et} \\ v_n \sim b_n \end{cases}$, alors $\frac{u_n}{v_n} \sim \frac{a_n}{b_n}$.

Éléments de preuve:

$$\frac{\frac{u_n}{v_n}}{\frac{a_n}{b_n}} = \underbrace{\frac{u_n}{a_n}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1} \times \underbrace{\frac{b_n}{v_n}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

Puissance d'exposant CONSTANT :

pour $u_n > 0$ à partir d'un certain rang et $\underset{\text{constante !!!}}{\alpha \in \mathbb{R}}$:

Si $u_n \sim v_n$, alors $(u_n)^\alpha \sim (v_n)^\alpha$.

Éléments de preuve:

$$\frac{(u_n)^\alpha}{(v_n)^\alpha} = \Bigg(\underbrace{\frac{u_n}{v_n}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1} \Bigg)^\alpha \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

□

Exemple 2 – Opérations et équivalents

? Déterminer un équivalent simple de $u_n = \dfrac{\sin\left(\frac{2}{n^3}\right)\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)}{\sqrt{1 - \cos\left(\frac{3}{n^2}\right)}}$.

□

5. Application au calcul de limites

Contexte

Dans tout ce paragraphe, sauf mention contraire, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désignent deux suites réelles.
On supposera par ailleurs que les relations d'équivalence ou de prépondérance écrites ici ont du sens.

☐

Théorème 5 – Limite et équivalent trivial

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}^*$, **alors** $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell$

ℓ doit être un réel NON NUL.

Éléments de preuve:

$$\frac{u_n}{\ell} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ell}{\ell} = 1$$

☐

Théorème 6 – Calcul de limite à l'aide d'une relation de prépondérance

Si $\begin{cases} u_n = o(v_n) \\ v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R} \end{cases}$, **alors** $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$

Éléments de preuve: Le résultat provient de l'écriture $u_n = v_n \times \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

☐

Théorème 7 – Limites et équivalents

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si $\begin{cases} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \end{cases}$ **alors** $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} v_n$.

Éléments de preuve: Le résultat provient de l'écriture $u_n = v_n \times (1+\varepsilon_n)$ avec $\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

☐

Application| [3145] | 6| Prépondérance et limites

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite de terme général $u_n = \left(1 - \dfrac{3}{2}\dfrac{\ln(n)}{n}\right)^n$.

On rappelle que $u_n = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$?

☐

Application|[3146]**| 7| Recherche d'un équivalent pour un calcul de limite**

Déterminer les limites des deux suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ dont les termes généraux sont :

$$u_n = n^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1\right) \qquad \text{et} \qquad v_n = n\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1\right)$$

□

Application|[3147]**| 8| Recherche d'un équivalent pour un calcul de limite**

Quelle est la limite de la $(u_n)_{n\geq 1}$ où :

$$u_n = \frac{\left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\ln\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)}{n^3 \tan^2\left(\frac{3}{2n^3}\right)}$$

□