AN03

Limite d'une suite et applications

Version du 30-10-2022 à 12:25

Contexte

Dans tout ce qui suit, sauf mention contraire, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désignera une suite réelle et n désignant un entier naturel. ☐

1. Limite finie ou infinie d'une suite

Introduction – Vision intuitive du « tendre vers »

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers un réel ℓ lorsque n tend vers $+\infty$ signifie que « plus n est grand, plus u_n est proche de ℓ ».

Par exemple, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = 1+\dfrac{1}{n}$ tend vers la valeur 1 lorsque n tend vers $+\infty$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ signifie que « u_n peut toujours être plus grand que n'importe quel nombre strictement positif ».

Par exemple, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = n^2+1$ tend vers $+\infty$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ signifie que « u_n peut toujours être plus petit que n'importe quel nombre strictement négatif ».

Par exemple, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = 2-n^3$ tend vers $-\infty$.

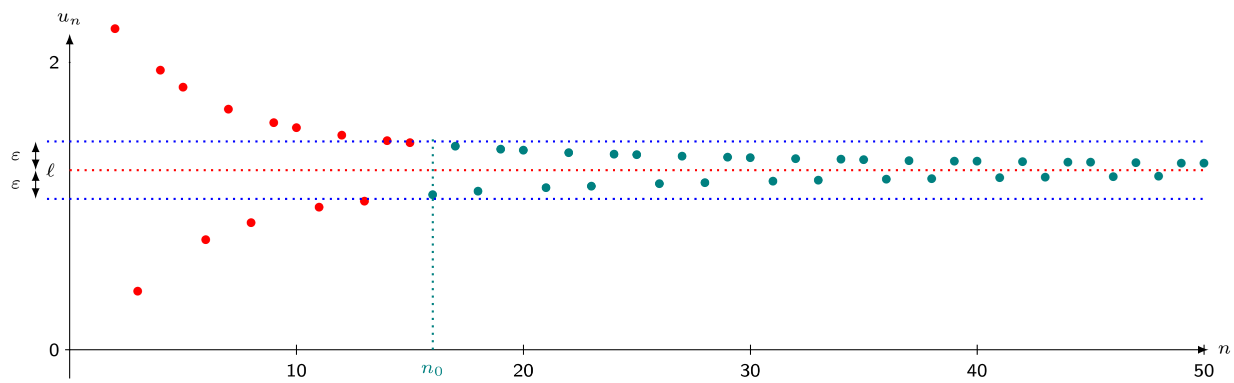
☐

Définition 1 – Limite finie d'une suite

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **admet le réel ℓ pour limite quand n tend vers** $+\infty$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Illustration et interprétation graphique



On notera que le rang n_0 à partir duquel $|u_n - \ell| < \varepsilon$ dépend de ε.

Cela signifie, que pour une précision ε donnée, tous les termes de la suite à partir d'un certain rang n_0, appartiennent à l'intervalle $[\ell-\varepsilon; \ell+\varepsilon]$.

Terminologie

Lorsque c'est le cas, on dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente , ou encore que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel ℓ .

Unicité de la limite et notation

La limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dès lors qu'elle existe est unique.

Notation « phrase de conclusion »

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \quad = \quad \ell$$

« La limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$ est ℓ »

Notation « calcul de limite »

$$u_n \quad \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \quad \ell$$

« La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel ℓ »

□

Remarque 1 – Convergence de la suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}$

On manipule depuis longtemps le résultat suivant : **la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général** $u_n = \dfrac{1}{n}$ **converge vers 0**, c'est à dire $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

En voici la justification avec la définition de la notion de limite :

□

Éléments de preuve:

Soit $\varepsilon > 0$. L'entier $n_0 = \left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ est tel que $n_0 \geq \dfrac{1}{\varepsilon}$. Ainsi, pour tout $n \geq n_0$, on a $n \geq \dfrac{1}{\varepsilon}$ et comme les deux membres de l'inégalité sont strictement positifs, on en déduit que $0 \leq \dfrac{1}{n} \leq \varepsilon$ ce que peut aussi s'écrire $\left|\dfrac{1}{n} - 0\right| \leq \varepsilon$.

On vient donc d'établir que : $\forall \varepsilon > 0,\ \underbrace{\exists n_0 \in \mathbb{N}}_{\substack{\textbf{en prenant} \\ n_0 = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1}},\quad \forall n \geq n_0,\quad \left|\dfrac{1}{n} - 0\right| \leq \varepsilon$

Définition 2 – Limite infinie d'une suite

Divergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $+\infty$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tend vers** $+\infty$ **quand** n **tend vers** $+\infty$ lorsque :

$$\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad u_n \geq A$$

« Phrase de conclusion »

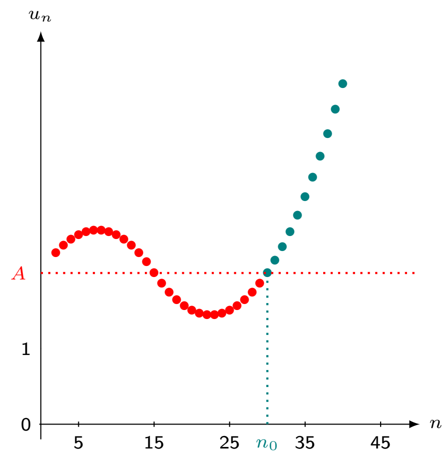
$$\lim_{n\to+\infty} u_n \quad = \quad +\infty$$

« La limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ »

« Calcul de limites »

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

« La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ »



Divergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $-\infty$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tend vers** $-\infty$ **quand** n **tend vers** $+\infty$ lorsque :

$$\forall B>0, \exists n_0\in\mathbb{N}, \forall n\geq n_0, \quad u_n\leq -B$$

« Phrase de conclusion »

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

« La limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ »

« Calcul de limites »

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

« La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ »

On aurait pu adopter la définition suivante : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ lorsque la suite $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

□

Définition 3 – Suites convergentes ou divergentes

Une suite qui admet une limite finie est dite **convergente**.

Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente**.

En particulier, une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ est une suite divergente.

On dira par ailleurs que **deux suites sont de même nature** si elles sont toutes les deux convergentes, ou toutes les deux divergentes.

□

2. Opérations sur les limites

Contexte

Afin d'alléger les énoncés qui vous suivre, on notera $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{+\infty\}\cup\{-\infty\}$.

□

Théorème 1 – Limite d'une somme, d'un produit et d'un quotient de suites

$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dots$	$\ell\in\mathbb{R}$	$\ell\in\mathbb{R}$	$\ell\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dots$	$\ell'\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$u_n+v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dots$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Forme $\infty-\infty$

On garde à l'esprit que $10^{10}-10^6$ reste un grand nombre, que $10^{10}-10^{10}$ ne fait pas grand chose, et que 10^6-10^{10} pose problème si c'est notre compte en banque...

$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dots$	$\ell\in\mathbb{R}$	$\pm\infty$	$\ell\in\mathbb{R}^*$	0
$v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dots$	$\ell'\in\mathbb{R}$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$u_n\times v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dots$	$\ell\times\ell'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	?

Forme $0\times\infty$

On garde à l'esprit que $10^{10}\times10^{-6}$ reste un grand nombre, que $10^{10}\times10^{-10}$ ne fait pas grand chose, et que $10^6\times10^{-10}$ n'est pas vraiment grand...

$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ldots$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}^*$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ldots$	$\ell' \in \mathbb{R}^*$	$\pm\infty$	0	$\ell \in \mathbb{R}$	$\pm\infty$	0
$\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ldots$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$?$	$?$

Formes $\dfrac{\infty}{\infty}$ et $\dfrac{0}{0}$

On garde à l'esprit que $\dfrac{10^{10}}{10^4}$ ou $\dfrac{10^{-4}}{10^{-10}}$ restent des grands nombres, que $\dfrac{10^5}{10^5}$ ou $\dfrac{10^{-5}}{10^{-5}}$ ne font pas grand chose, et que $\dfrac{10^4}{10^{10}}$ ou $\dfrac{10^{-10}}{10^{-4}}$ ne sont pas vraiment grands...

☐

Théorème 2 – Passage à la limite dans une inégalité | Pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par m, alors $\ell \geq m$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par M, alors $\ell \leq M$.

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$ et que $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell' \in \mathbb{R}$, alors $\ell \leq \ell'$.

☐

3. Limites des suites géométriques et arithmético-géométriques

Théorème 3 – Limite d'une suite géométrique

Cas où $\lvert q\rvert < 1$	Cas où $q > 1$	Cas où $q = 1$	Cas où $q \leq -1$
$q^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$	$q^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$	$q^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$	$(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente

On peut énoncer en fait que : $\big((q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente$\big) \Leftrightarrow \big((\lvert q\rvert < 1)$ ou $(q = 1)\big)$

☐

Application| [3103] | 1| Limite de suites géométriques

Quelles sont les limites des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les termes généraux sont :

$$u_n = \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \;; \qquad u_n = -2\left(\frac{5}{2}\right)^n \;; \qquad u_n = \frac{12}{5}(-3)^n$$

☐

Théorème 4 – Limite d'une suite arithmético-géométrique | $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq -1$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = a \times u_n + b$$

On note ℓ l'unique solution de l'équation $(\star)$: $x = ax + b$.

Cas $u_0 = \ell$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à ℓ.

Cas $u_0 \neq \ell$

- Si $|a| < 1$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
- Si $a > 1$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$.
- Si $a \leq -1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

□

Exemple 1 – Limite d'une suite arithmético-géométrique

Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n + 2 \end{cases}$.

□

4. Croissances comparées

Théorème 5 – Croissances comparées | Pour $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\gamma > 0$

$\dfrac{(\ln(n))^\beta}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$	$\dfrac{\mathrm{e}^{\gamma n}}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$	$\dfrac{n^\alpha}{\mathrm{e}^{\gamma n}} = n^\alpha \mathrm{e}^{-\gamma n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
$\dfrac{(\ln(n))^{12}}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$	$\dfrac{\mathrm{e}^{2n}}{n^{24}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$	$n^{24}\mathrm{e}^{-2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

□

5. Caractérisations et caractéristiques des suites convergentes

Théorème 6 – Convergence et encadrement

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Éléments de preuve: C'est une simple conséquence de la définition de $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$.

On retiendra donc que :
« Toute suite convergente est bornée ».

□

Théorème 7 – Signe d'une suite convergente vers $\ell \in \mathbb{R}_+^*$

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell > 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive à partir d'un certain rang.

□

Éléments de preuve:
C'est là encore une simple conséquence de la définition de $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$.

Théorème 8 – Limites des suites extraites

Transfert de la limite de la suite aux suites extraites

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors **toute suite extraite** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet ℓ pour limite.

Suites extraites et limite

Si $u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ avec $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

□

Point méthode 1 – Montrer qu'une suite ne peut pas être convergente

Pour montrer qu'une suite **ne peut pas être convergente** :

on peut montrer qu'elle n'est pas bornée, c'est à dire qu'elle n'est par minorée ou pas majorée ;

on peut montrer que ses deux suites extraites d'indices pairs et impairs $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$:
- ne convergent **pas vers la même limite** ;
- au moins l'**une des deux diverge**.

□

Application| [3104] | 2| Suites extraites et convergence

Les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ dont les termes généraux sont :

$$u_n = \frac{1+(-1)^n}{n} \text{ et } v_n = \frac{n+1}{n\left((-1)^n + \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)}$$

sont-elles convergentes ?

□

6. Encadrement et limites

Contexte

Dans ce paragraphe, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont trois suites réelles et $\ell \in \mathbb{R}$.

On suppose qu'à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$: $\quad \forall n \geq n_0, \quad u_n \leq v_n \leq w_n$

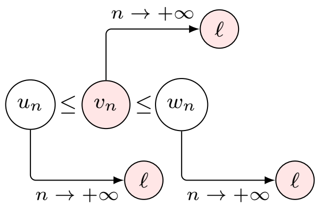
□

Théorème 9 – Théorème d'encadrement

Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

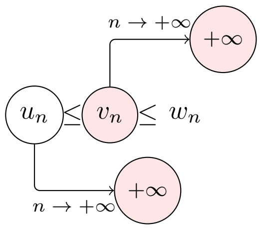
alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

□

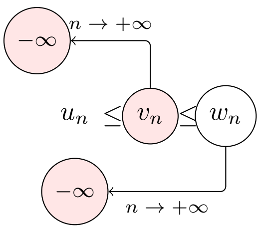


Théorème 10 – Divergence vers $\pm\infty$ par minoration ou majoration

Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, **alors** $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.



Si $w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$, **alors** $v_n \lim_{n,+\infty} -\infty$.



□

Application| [3105] | 3| Manipuler le théorème d'encadrement

Déterminer la limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont on donne le terme général ci-dessous :

$u_n = \dfrac{n}{n+1}\mathrm{e}^{-n}$	$u_n = \dfrac{n+1}{n}\ln(n)$	$u_n = (-1)^n n\mathrm{e}^{-n}$

□

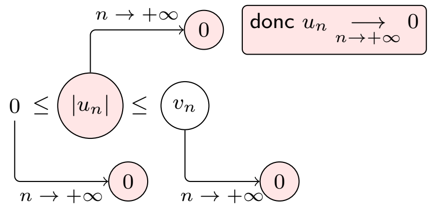
7. Valeur absolue et limite

Théorème 11 – Majoration d'une valeur absolue

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que :

$$\forall n \geq n_0, \qquad |u_n| \leq v_n$$

Si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. □



Application| [3106] | 4| Limites et valeurs absolues

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ dont le terme général est :

$$u_n = \frac{\sin(n)}{n^2}$$

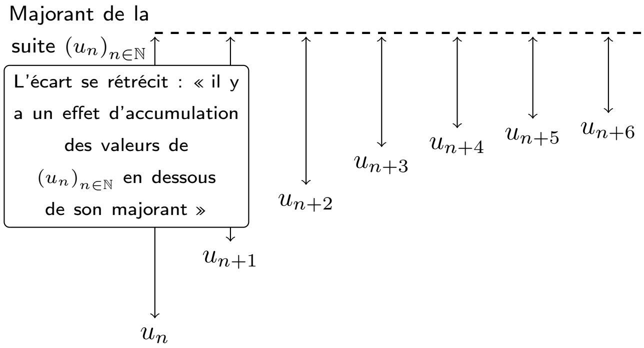
□

8. Théorème de la limite monotone

Introduction – Comportement attendu pour une suite croissante majorée/non majorée

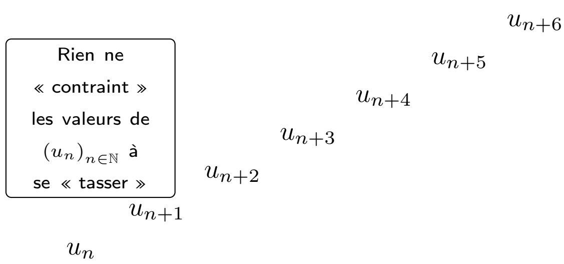
Intuitivement, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante majorée, cette dernière devrait converger :

> Ce qui devrait « faire converger la suite » c'est que son caractère croissant « force » les valeurs de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à augmenter mais son caractère majoré, les « empêchera » de continuer à croitre « démesurément ».



Dans la même idée, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante non majorée, cette dernière devrait tendre vers $+\infty$.

> Le caractère croissant de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ici pas contraint par une valeur que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas dépasser. Elle prend donc des valeurs de plus en plus grandes, et on revient sur l'idée intuitive de la notion de « tendre vers $+\infty$ » évoquée au début du chapitre.



□

Théorème 12 – Limite d'une suite monotone

Cas des suites croissantes

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante majorée, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un <u>réel</u> ℓ.

On a dans ce cas : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \ell$

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante non majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.

On a donc : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Cas des suites décroissantes

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante minorée, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un <u>réel</u> ℓ

On a dans ce cas : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq \ell$

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et non minorée, alors elle diverge vers $-\infty$, c'est à dire :

On a donc : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$

□

Application| [3107] **| 5| Manipuler le théorème de la limite monotone**

(1). Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est $u_n = 1 - \dfrac{n}{n+1}$.

(2). Peut-on affirmer qu'elle converge ?

□

9. Suites adjacentes

Définition 4 – Suites adjacentes

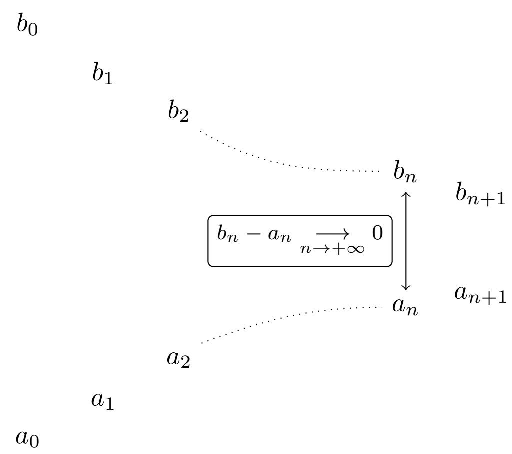
On dit que <u>deux</u> suites sont **adjacentes** lorsque :

l'une est croissante	l'autre est décroissante ;	la différence entre les deux suites converge vers 0 .

Reformulation | Contextualisation | Illustration

Les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes lorsque :

- la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ;
- la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ;
- $b_n - a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.



□

On montre alors lorsque c'est le cas, que l'on a en plus : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leq b_n$

Théorème 13 – Limite de deux suites adjacentes

Si deux suites sont adjacentes ,

alors elles convergent vers une même limite <u>finie</u> commune $\ell \in \mathbb{R}$.

De plus, en reprenant les notations de la définition précédente, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq \ell \leq b_n$$

□

Application| [3108] | 6| Suites adjacentes

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ v_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{4} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \dfrac{3v_n + 1}{4} \end{cases}$$

On <u>admet</u> les deux résultats suivants :

- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq 1 \leq v_n$
  On peut montrer ce résultat par récurrence.
- La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est $w_n = v_n - u_n$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{3}{4}$ et de premier terme $w_0 = 2$.
  Il suffit de voir que $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{3}{4}(v_n - u_n)$.

Démontrer alors que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et déterminer leur limite commune.

□