AN02

Suites arithmético-géométriques et récurrentes linéaires d'ordre 2

Version du 30-10-2022 à 10:21

1. Suites arithmético-géométriques

Définition 1 – Suites arithmético-géométriques

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique lorsqu'il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ avec $a\neq 1$ tel que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = a\times u_n + b$$

Origine de la terminologie

On remarque que si $a=1$, une telle suite est arithmétique, et si $b=0$, une telle suite est géométrique.

Illustration

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où : $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} & = & -2u_n - 1\end{array}\right.$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où : $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} & = & -\dfrac{1}{2}u_n + 1\end{array}\right.$

□

Exemple 1 – Calculs de termes

?

Déterminer le 5e terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 2 \\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}u_n + 1\end{array}\right.$.

□

Théorème 1 – Obtention du terme général d'une suite arithmético-géométrique | $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq -1$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = a \times u_n + b$
Si on note ℓ l'unique solution de l'équation $(\star)$: $x = ax + b$
alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = u_n - \ell$ est une suite géométrique de raison a.

☐

Éléments de preuve:

Point méthode 1 – Terme général d'une suite arithmético-géométrique | $u_{n+1} = a \times u_n + b$ avec $a \neq -1$

On résout l'équation $(\star)$: $x = ax + b$ et on note ℓ la solution → La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $v_n = u_n - \ell$ est géométrique de raison a →(Formule suite géométrique) $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = a^n \times v_0$ avec $v_0 = u_0 - \ell$ →($u_n = v_n + \ell$) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a^n \times v_0 + \ell$

☐

Exemple 2 – Terme général d'une suite arithmético-géométrique

?

Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$.

☐

2. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition 2 – Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 lorsqu'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$$

u_{n+2} est combinaison linéaire de u_{n+1} et de u_n

Équation caratéristique

L'équation caractéristique associée à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est : $(\star)\,:\, ar^2 + br + c = 0$ — inconnue r

Illustration

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^{n+1} - 1$

$$\begin{array}{rcl} \forall n \in \mathbb{N},\, 3u_{n+1} - 2u_n & = & 3\left(2^{n+2}-1\right) - 2\left(2^{n+1}-1\right) \\ & = & 3\times 2^{n+2} - 3 - 2^{n+2} + 2 \\ & = & 2\times 2^{n+2} - 1 \\ & = & 2^{n+3} - 1 \\ & = & u_{n+2} \end{array}$$

et on a la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+2} - 3u_{n+1} - 2u_n = 0$$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0$$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+2} = 2u_{n+1} - 3u_n$$

□

Théorème 2 – Expression du terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 | $(a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2 telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$$

On note Δ le discriminant de l'équation caractéristique $(\star)\,:\, ar^2 + br + c = 0$.

Cas où $\Delta > 0$

$(\star)$ admet deux solutions réelles r_1 et r_2 et il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_n = \lambda \times (r_1)^n + \mu \times (r_2)^n$$

Cas où $\Delta = 0$

$(\star)$ admet une solution réelle r_0 et il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_n = \lambda \times n \times (r_0)^n + \mu \times (r_0)^n$$

Cas où $\Delta < 0$

$(\star)$ admet deux solutions complexes conjuguées $r_1 = \rho e^{i\theta}$ et $r_2 = \overline{r_1}$et il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_n = \rho^n\left(\lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta)\right)$$

Détermination explicite de u_n en fonction de n

Le couple (λ,μ) est clairement déterminé de façon unique par la donnée de u_0 et u_1.

□

Exemple 3 – Recheche du terme général

?

Déterrminer l'expression du terme générale de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par :

$$\begin{cases} u_0 &= -1 \\ u_1 &= 1 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}-u_{n+1} &= 2u_n \end{cases}$$

Équation caractéristique

Discriminant $\Delta = \dots$

Solution de l'équation caractéristique

Forme générale de u_n

Expression de u_n en fonction de n | Identification des constantes

□

Exemple 4 – Recheche du terme général

?

Déterrminer l'expression du terme générale de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par :

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_1 &= -2 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2} &= \dfrac{1}{2}u_{n+1}-\dfrac{1}{4}u_n \end{cases}$$

Équation caractéristique

Discriminant $\Delta = \dots$

Solution de l'équation caractéristique

Forme générale de u_n

Expression de u_n en fonction de n | Identification des constantes

□

Exemple 5 – Recheche du terme général

?

Déterrminer l'expression du terme générale de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ u_1 & = & 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} & = & u_{n+1} - u_n \end{array}\right.$$

Équation caractéristique

Discriminant $\Delta = \ldots$

Solution de l'équation caractéristique

Forme générale de u_n

Expression de u_n en fonction de n | Identification des constantes

□