AN01

Généralités sur les suites réelles

Version du 30-10-2022 à 08:19

1. Principaux modes de génération d'une suite

Introduction – Des suites, pour quoi faire ?

Calcul de capital

On dispose de $1\,000$ € sur un un compte courant et d'une rentrée mensuelle de 100 € à chaque début de mois, y compris le premier mois. On décide de ne dépenser qe 20% de notre compte chaque mois. Quel est le solde de notre compte au bout d'un an ? Peut-on passer en négatif ?

On notera C_n notre capital au début du n^{e} mois :

C_1 : capital au début du 1^{e} mois
C_2 : capital au début du 2^{e} mois
etc.

On cherche donc à connaître C_{12}, et la valeur de n telle que $C_n < 0$.

Évolution d'une population

On étudie, dans un milieu nutritif approprié, l'évolution d'une population de bactéries, et on constate, que cette population augmente de 25% toutes les heures. Quelle sera la population au bout de 10 heures ? Au bout de combien de temps le nombre de bactéries aura doublé dans le milieu d'étude ?

On notera P_n la population de bactéries à l'instant $t = n$ (en heures) :

P_0 : population à l'instant $t = 0$ heure
P_1 : population à l'instant $t = 1$ heure
etc.

On cherche donc T_{10} et la valeur de n telle que $P_n > 2 \times P_0$.

Principe d'indexation d'une suite de nombres

« Liste ordonnée » de nombres	23	-7	$\sqrt{2}$	2	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\cdots$
Liste d'index « numérotant » les éléments de la liste	0	1	2	3	4	$\cdots$	$\cdots$

□

Définition 1 – Suite réelle

On appelle **suite de nombres réels**, toute application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$:

$$u : \begin{array}{|ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u(n) \end{array}$$

Au lieu de noter $u(n)$ l'image par u de l'entier n, on notera $u(n) = u_n$ et on dit que u_n est le **terme général** de la suite.

Notation des suites

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n\geq 0}$, (u_n) ou plus simplement u ;

Ensemble des suites réelles

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles.

Sens des notations

- u_n désigne le **terme d'indice** n de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en aucun cas la suite elle même.
- La suite peut d'ailleurs n'être définie que pour $n \geq 1$, ou $n \geq 2$, etc. et on notera alors $(u_n)_{n\geq 1}$, $(u_n)_{n\geq 2}$, etc. n étant alors implicitement un entier naturel.

Illustration du processus de construction d'une suite

« Liste ordonnée » de nombres	23	-7	$\sqrt{2}$	2	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\cdots$
Liste d'index « numérotant » les éléments de la liste	0	1	2	3	4	$\cdots$	$\cdots$
Construction de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$	$u_0 = 23$	$u_1 = -7$	$u_2 = \sqrt{2}$	$u_3 = 2$	$u_4 = -\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\cdots$

□

Application| [3088] | 1| Suite définie explicitement

Calculer les 5 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est donné par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{2n}{n^2+1}$$

□

Application| [3089] | 2| Suite définie par une relation de récurrence

Calculer les 5 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ donnée par les relations :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_1 & = & 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} & = & 2u_n + 1 \end{array} \right.$$

□

Application| [3090] | 3| Suite définie par une fonction

Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} [0;\sqrt{3}] & \longrightarrow & [0;\sqrt{3}] \\ x & \longmapsto & \frac{1}{2}\left(3-x^2\right) \end{array} \right.$.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par les relations : $\left\{ \begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} & = & f\left(u_n\right) \end{array} \right.$

(1). Expliciter u_{n+1} en fonction de u_n.

(2). Calculer alors les 5 premiers termes de la suite u.

□

Remarque 1 – Problématique inhérente aux suites dont les termes sont « interdépendants »

La suite de Fibonnacci $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\left\{ \begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ u_1 & = & 1 \\ \forall n \geq 2,\, u_n & = & u_{n-1} + u_{n-2} \end{array} \right.$ est construite sur le principe suivant :

Le terme u_n est calculé à partir de termes « précédents »

Termes de la suite	$\cdots$	$\cdots$	u_{n-4}	u_{n-3}	u_{n-2}	u_{n-1}	u_n	u_{n+1}	u_{n+2}	$\cdots$	$\cdots$
Liste des index de la suite	$\cdots$	$\cdots$	$n-4$	$n-3$	$n-2$	$n-1$	n	$n+1$	$n+2$	$\cdots$	$\cdots$

Existe-t-il un moyen de calculer directemennt u_n à partir de n ?

□

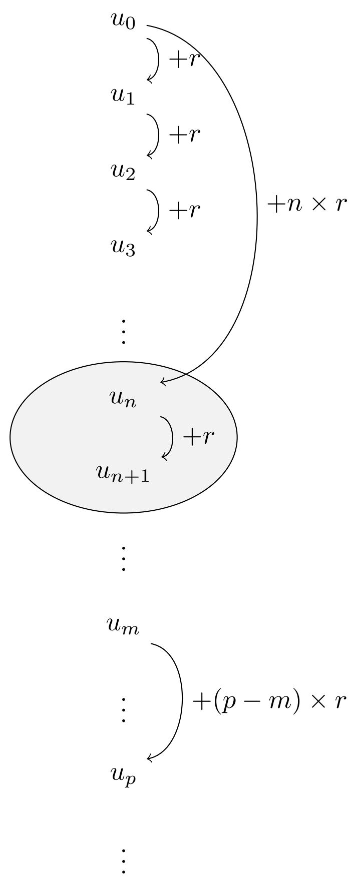
2. Suites arithmétiques et suites géométriques

Définition 2 – Suites arithmétiques

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite arithmétique de raison** $r \in \mathbb{R}$ lorsque :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r$$

□



Théorème 1 – Expression du terme général

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + n \times r} \qquad \boxed{\forall (m,p) \in \mathbb{N}^2,\ u_p = u_m + (p-m) \times r}$$

Ces formules sont caractéristiques d'une telle suite.

□

Point méthode 1 – Montrer qu'une suite est arithmétique

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **arithmétique**, on montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante, cette dernière étant alors la raison de la suite.

□

On peut aussi essayer d'exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et remarquer que u_{n+1} s'écrit sous la forme $u_{n+1} = u_n + r$

Exemple 1 – Calcul de termes pour une suite arithmétique

? $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison 5 avec $u_3 = -1$. Que vaut u_5 ?

□

Théorème 2 – Somme des termes d'une arithmétique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **arithmétique** de raison r et de premier terme u_0.

Somme des termes d'indices 0 à n

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)u_0 + r \times \frac{n(n+1)}{2} = \underbrace{\frac{u_0+u_n}{2}}_{\text{moyenne des termes extrêmes}} \times \underbrace{(n+1)}_{\text{nombre de termes}}$$

Somme des termes d'indices p à n

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = \underbrace{\frac{u_p+u_n}{2}}_{\text{moyenne des termes extrêmes}} \times \underbrace{(n-p+1)}_{\text{nombre de termes}}$$

avec $p \leq n$

□

Application| [3096] | 4| Somme de termes d'une suite arithmétique

Calculer $\sum_{k=0}^{7} u_k$ où, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n + 5$. ☐

Définition 3 – Suites géométriques

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite géométrique de raison** $q \in \mathbb{R}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = q \times u_n$$

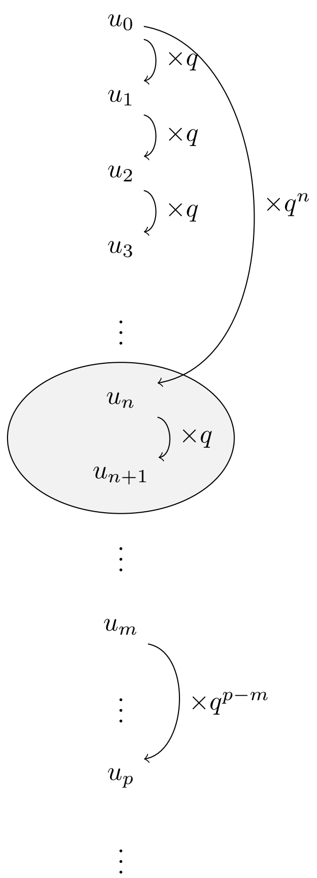
☐

Théorème 3 – Expression du terme général

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = q^n u_0} \qquad \boxed{\forall (m,p) \in \mathbb{N}^2, \quad u_p = q^{p-m} u_m}$$

Ces formules sont caractéristiques d'une telle suite. ☐



Point méthode 2 – Montrer qu'une suite est géométrique

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **géométrique**, si l'on sait que **tous** les termes de la suite sont **non nuls**, on montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant, ce dernier étant alors la raison de la suite. ☐

On peut aussi essayer d'exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et remarquer que u_{n+1} s'écrit sous la forme $u_{n+1} = q \times u_n$

Application| [3092] | 5| Suite géométrique

$(u_n)_{n\geq 3}$ est une suite géométrique de premier terme $u_3 = 12$ et de raison $\frac{1}{2}$. Combien vaut u_{10} ? ☐

Application| [3093] | 6| Reconnaître une suite géométrique

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \ln(3^n u_n) = n-1$ est une suite géométrique.

□

Théorème 4 – Somme des termes d'une géométrique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **géométrique** de raison q et de premier terme u_0.

Pour $q \neq 1$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times \frac{1-q^{\overbrace{n+1}^{\text{nombre de termes}}}}{1-q}$$

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = \text{Premier terme de la somme} \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$$

avec $p \leq n$

Pour $q = 1$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} u_k = \underbrace{(n+1)}_{\text{nombre de termes}} \times u_0$$

□

Application| [3097] | 7| Somme de termes d'une suite géométrique

Déterminer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{4} \frac{1}{4^k} \qquad \sum_{k=3}^{8} 3 \times 2^k \qquad \sum_{k=0}^{5} 3^{k+2} \qquad \sum_{k=2}^{8} \frac{2^k}{3^{k+1}}$$

□

3. Notion de suite extraite

Définition 4 – Suite extraite

On appelle **suite extraite de** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ obtenue en ne prenant que certains éléments de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mais une infinité d'entre eux cependant, l'ordre des indices étant strictement croissant.

On parle aussi de **sous-suite** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Formalisation du concept de suite extraite

Une définition plus formelle de ce concept repose sur la donnée d'une application $\varphi : \begin{array}{|ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \varphi(n) \end{array}$ où φ est une application strictement croissante au sens où $\varphi(n) < \varphi(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Ainsi, une suite extraite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ serait définie par $v_n = u_{\varphi(n)}$.

□

Exemple 2 – Suites extraites des termes d'indices multiples de trois

Termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	$\cdots$
Termes « conservés » pour la suite extraite	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	$\cdots$
Suite-extraite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$	v_0			v_1			v_2			v_3	$\cdots$

« Mode » de construction : $v_n = u_{3n}$

□

Définition 5 – Suites d'indices pairs et impairs

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{2n}$$

est appellée la **suite extraite des termes d'indices pairs** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = u_{2n+1}$$

est appellée la **suite extraite des termes d'indices impairs** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	$\cdots$
Termes d'indices pairs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	$\cdots$
Suite extraite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des termes d'indices pairs de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$	v_0		v_1		v_2		v_3		v_4	$\cdots$

« Mode » de construction : $v_n = u_{2n}$

Termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	$\cdots$
Termes d'indices impairs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	$\cdots$
Suite extraite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des termes d'indices impairs de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$		w_0		w_1		w_2		w_3		$\cdots$

« Mode » de construction : $w_n = u_{2n+1}$

□

Application| [3099] | 8| Calcul de termes pour une suite extraite

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite dont le terme général est $u_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n^2}$. Déterminer les 5 premiers termes des suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

□

Application| [3098] | 9| Calcul de termes pour une suite extraite

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite dont le terme général est $u_n = 2n+1$, et on considère la suite extraite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n = u_{n^2}$.
Calculer les 5 premiers termes de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

□

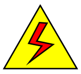
4 . Exemple de représentation graphique d'une suite réelle

Définition 6 – Graphe d'une suite

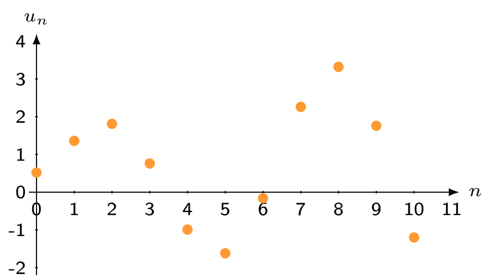
Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, il est possible d'en considérer le « graphe » et comme pour les fonctions numériques d'en faire une représentation graphique dans un repère orthogonal du plan.

Il s'agit donc de placer dans un repère l'ensemble de points :

$$\mathcal{G}_u = \{(n, u_n)\,,\ n \in \mathbb{N}\}$$



Mais ce n'est surtout pas une finalité pour une suite.



Comme pour les fonctions, cela pourra peut-être permettre de conjecturer quelques résultats sur cette suite puisque « visuellement » plus parlant que si nous regardions la liste des valeurs u_0, u_1, u_2,..., mais qu'il faudra ensuite établir rigoureusement.

□

5. Suites minorées, majorées, bornées

Définition 7 – Encadrement de suites à valeurs réelles

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ majorée par M	$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ minorée par m	$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée
$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$	$\forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n$	majorée et minorée.

Illustration

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

On a clairement : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \underbrace{1 - \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\geq 0}}_{\leq 1}$

donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 1.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1 + \frac{1}{n+1}$$

On a clairement : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \underbrace{1 + \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\geq 0}}_{\geq 1}$

donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1.

□

Application|[3101]| **10| Majoration et minoration de suites**

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est le suivant, sont-elles majorées, minorées, bornées ?

(1). $u_n = n^2 + 3$;

(2). $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$;

(3). $u_n = (-1)^n$;

(4). $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

□

6. Variation d'une suite

Définition 8 – Monotonie d'une suite d'une suite à valeurs réelles

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_{n+1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n \geq 0$$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq u_{n+1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n \leq 0$$

Terminologie | Extension des définitions

On dira que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone lorsqu'elle est croissante ou décroissante.

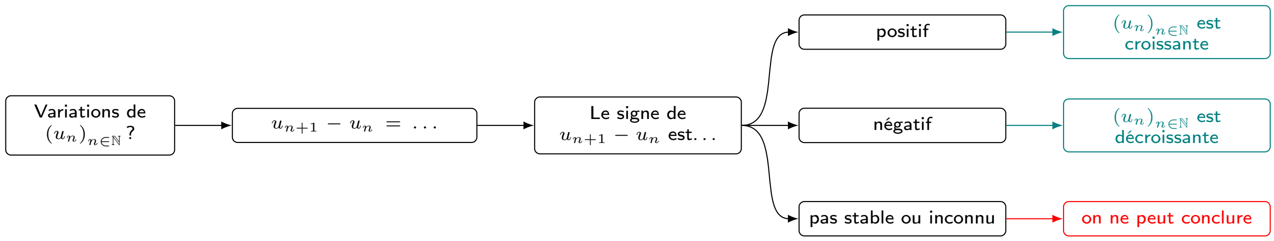
On dit aussi que l'on étudie les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On étend cette terminologie en parlant de suite **strictement croissante**, **strictement décroissante**, **strictement monotone** lorsque l'inégalité correspondante est stricte.

La monotonie d'une suite peut n'être vraie qu'à partir d'un certain rang : ce qui est important c'est que les variations soient « stables » à partir d'une valeur de n.

□

Point méthode 3 – Étudier les variations d'une suite à l'aide de la définition



Mode EXPERT | Étudier les variations d'une suite à l'aide du quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de signe strictement positif, alors on peut étudier ses variations à l'aide du quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ que l'on comparera à 1.

Dans ce cas on aura : $\left((u_n \leq u_{n+1}) \Leftrightarrow \left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \right) \right)$ et $\left((u_n \geq u_{n+1}) \Leftrightarrow \left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 \right) \right)$.

□

Application| [3102] | 11| Sens de variation d'une suite

Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 1 - \frac{n}{n+1}$$

□