AN15

Généralités sur les fonctions de deux variables

Version du 27-01-2023 à 10:32

1. Généralités

Définition 1 – Fonction de deux variables et graphe

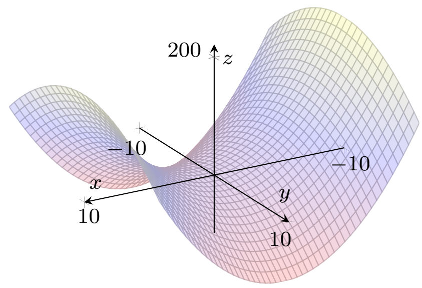
On appelle fonction de deux variables toute application définie sur une partie Ω de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Autrement dit, il s'agit des applications de la forme $f : \begin{array}{|ccc} \underset{\subset\mathbb{R}^2}{\Omega} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$.

On appelle graphe de la fonction f ou surface représentative de f, l'ensemble $\mathcal{G}_f$ des points $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ où $(x,y) \in \Omega$ et $z = f(x,y)$:

$$\mathcal{G}_f = \{(x, y, f(x,y)),\ (x,y) \in \Omega\}$$

□



Représentation de $f : (x,y) \longmapsto 2x(x-1) - y^2 + 2$

Exemple 1

$f : \begin{array}{|ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = (x^2+y^2)\,\mathrm{e}^{x+y} \end{array}$ □

$f : \begin{array}{|ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = (x^2+y^2)\ln(x)\sqrt{y} \end{array}$

Définition 2 – Ligne de niveau

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une application et $k \in \mathbb{R}$.

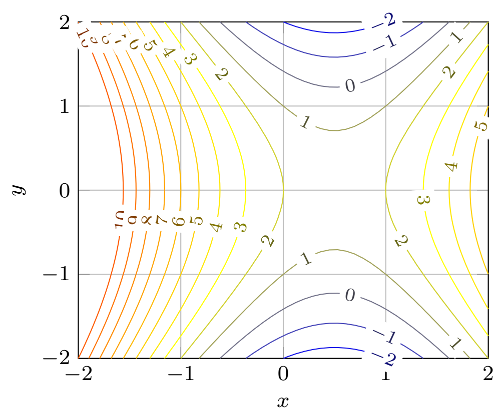
On appelle ligne de niveau k ou courbe de niveau k de f l'ensemble :

$$\Lambda_k = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = k\right\}$$

On peut interpréter la ligne de niveau k de f :

- comme étant l'ensemble des points de la surface d'équation $z = f(x,y)$ de côte $z = k$;
- ou encore comme étant la section de la surface d'équation $z = f(x,y)$ par le plan d'équation $z = k$

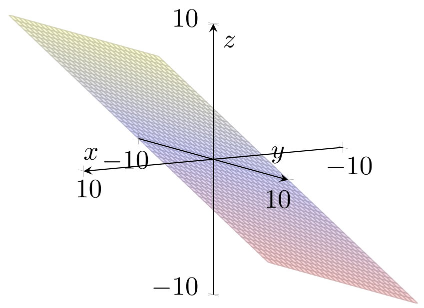
□

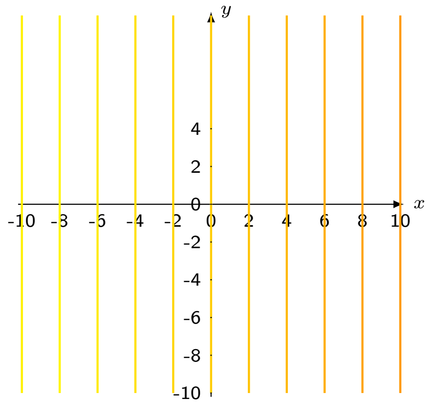


Lignes de niveau k de $f(x,y) = 2x(x-1) - y^2 + 2$ pour $k \in [\![-10;10]\!]$

Proposition 1 – Graphe et lignes de niveau de $(x,y) \longmapsto x$ et $(x,y) \longmapsto y$

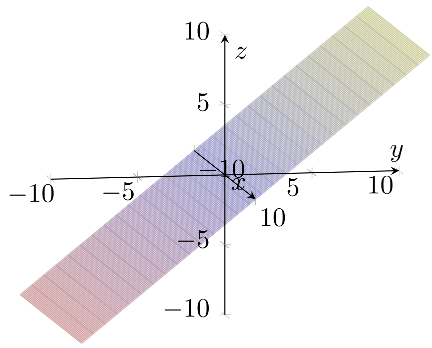
$(x,y) \longmapsto x$

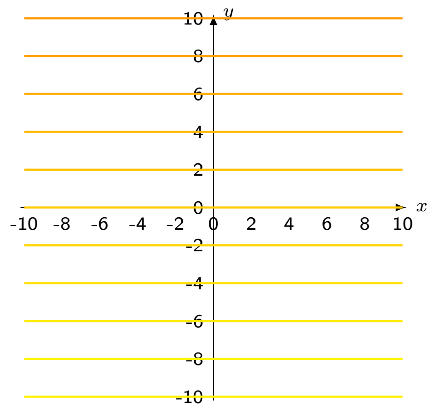




□

$(x,y) \longmapsto y$





Proposition 2 – Graphe et lignes de niveau de $(x,y) \longmapsto ax+by$

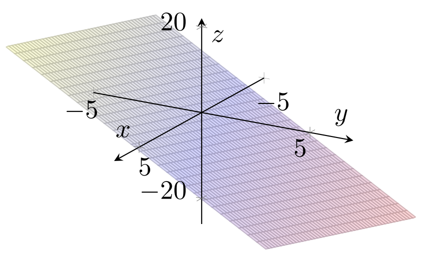
Les lignes de niveaux de $f : (x,y) \longmapsto ax+by$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ sont les droites d'équation $ax+by=k$ où $k \in \mathbb{R}$.

Le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur orthogonal à chacune d'entre elles.

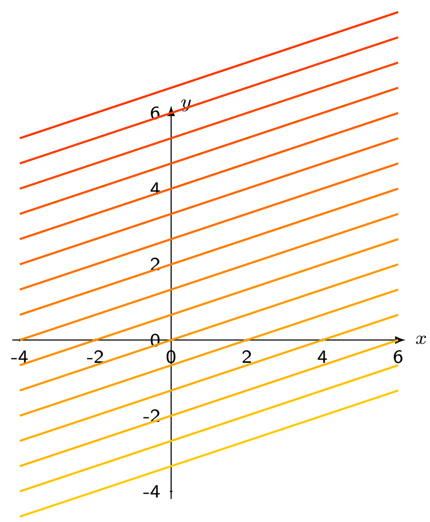
□

Éléments de preuve:

Exemple 2 – Graphe et lignes de niveau de $(x,y) \longmapsto x-3y$



□



2. Dérivées partielles d'ordre 1

Contexte

Dans tout ce paragraphe, $f : (x, y) \longmapsto f(x, y)$ désignera une fonction définie sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

$\square$

Définition 3 – Applications partielles

On appelle 1ᵉ application partielle l'application :

$$f_x : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x, y) \end{array} \right.$$
y est considéré constant

où I et un intervalle de $\mathbb{R}$ dépendant bien évidemment de Ω et y fixé est tel que $(x, y) \in \Omega$.

y est donc considéré comme constant.

$\square$

On appelle 2ᵉ application partielle l'application :

$$f_y : \left| \begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & f(x, y) \end{array} \right.$$
x est considéré constant

où J et un intervalle de $\mathbb{R}$ dépendant bien évidemment de Ω et x fixé est tel que $(x, y) \in \Omega$.

x est donc considéré comme constant.

Définition 4 – Dérivée partielle d'ordre 1 en $(x_0, y_0) \in \Omega$

On dit que f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à x en (x_0, y_0) lorsque la 1ᵉ application partielle f_x de f est dérivable en x_0, c'est à dire lorsque le quotient

$$\frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

admet une limite finie lorsque x tend vers x_0.

Lorsque c'est le cas, cette limite est notée $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ ou $\partial_1 f(x_0, y_0)$ et s'appelle donc la 1ᵉ dérivée partielle de f en (x_0, y_0) ou encore dérivée partielle de f par rapport à x en (x_0, y_0) :

$$\frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f_x'(x_0) \underset{\text{Déf.}}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

$\square$

On dit que f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à y en (x_0, y_0) lorsque la 1ᵉ application partielle f_y de f est dérivable en y_0, c'est à dire lorsque le quotient

$$\frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

admet une limite finie lorsque y tend vers y_0.

Lorsque c'est le cas, cette limite est notée $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ ou $\partial_2 f(x_0, y_0)$ et s'appelle donc la 2ᵉ dérivée partielle de f en (x_0, y_0) ou encore dérivée partielle de f par rapport à y en (x_0, y_0) :

$$\frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} \underset{y \to y_0}{\longrightarrow} f_y'(y_0) \underset{\text{Déf.}}{=} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Définition 5 – Applications dérivées partielles

Pour tous les couples $(x, y) \in \Omega$ où cela a du sens, on peut définir deux applications

$$\frac{\partial f}{\partial x} : (x, y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} : (x, y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

appelées respectives dérivées partielles d'ordre 1 de f par rapport à x et à y.

$\square$

Point méthode 1 – Déterminer la dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à x et à y

L'expression $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ s'obtient en dérivant l'expression $f(x, y)$:
- en considérant que **SEULE** la variable x est variable, c'est à dire que y est considéré comme une constante ;
- en faisant opérer les règles opératoires de dérivation connues pour les fonctions numériques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

L'expression $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ s'obtient en dérivant l'expression $f(x, y)$:
- en considérant que **SEULE** la variable y est variable, c'est à dire que x est considéré comme une constante ;
- en faisant opérer les règles opératoires de dérivation connues pour les fonctions numériques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

□

Application|[3754]| 1| Calcul de dérivées partielles

Expliciter les deux dérivées partielles premières $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ de :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x^2 + xy\,\mathrm{e}^{x-y} \end{array} \right.$$

□

Remarque 1 – Notation générique $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ des dérivées partielles d'ordre 1

Les notations $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont clairement attachées aux noms des variables utilisées dans l'expression définissant f, mais bien pratiques car porteuses de sens par rapport aux variables manipulées.

Pour pour être cohérent avec de telles notations, les dérivées partielles d'ordre 1 de la fonction de deux variables $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (t, u) & \longmapsto & (t^2 + u^2)\,\mathrm{e}^{-t+u} \end{array} \right.$ seraient notées $\dfrac{\partial g}{\partial t}(t, u)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial u}(t, u)$.

Lorsque l'on calcule des dérivées partielles d'ordre 1, techniquement on fixe une variable et on dérive par rapport à l'autre. Pour se détacher du nom des variables [a] dans cet acte de dérivation, on préferea utiliser les deux notations suivantes $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$.

Ainsi :
- $\partial_1 f$ désignera la dérivée partielle de la fonction f de deux variables par rapport à sa première variable.
- $\partial_2 f$ désignera la dérivée partielle de la fonction f de deux variables par rapport à sa deuxième variable.

Par exemple pour $f : (x, y) \longmapsto x^2 + y^2 + 2xy - x + 3y - 1$ et $g : (m, n) \longmapsto m^2 - n^2 - mn + m - 2n + 3$ on aura :

$\partial_1 f(x, y) =$

$\partial_2 f(x, y) =$

$\partial_1 g(m, n) =$

$\partial_2 g(m, n) =$

□

a. qui au demeurant sont muettes...

3. Dérivées partielles d'ordre 2

Définition 6 – Dérivées partielles d'ordre 2

Les deux applications dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x} : (x,y) \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} : (x,y) \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ sont deux applications définies chacune sur une partie de $\mathbb{R}^2$ pour lesquelles, lorsque cela a du sens, on peut définir leurs dérivées partielles d'ordre 1 :

- $\dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x} \underset{\text{que l'on préfèrera noter}}{\rightsquigarrow} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}$ notée plutôt $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ où on dérive l'expression $f(x,y)$ une première fois par rapport à x pour obtenir $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, que l'on dérive une deuxième fois par rapport à x pour obtenir $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$;
- $\dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y} \underset{\text{que l'on préfèrera noter}}{\rightsquigarrow} \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ où on dérive l'expression $f(x,y)$ une première fois par rapport à x pour obtenir $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, que l'on dérive une deuxième fois par rapport à y pour obtenir $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$;
- $\dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x} \underset{\text{que l'on préfèrera noter}}{\rightsquigarrow} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ où on dérive l'expression $f(x,y)$ une première fois par rapport à y pour obtenir $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, que l'on dérive une deuxième fois par rapport à x pour obtenir $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$;
- $\dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial y} \underset{\text{que l'on préfèrera noter}}{\rightsquigarrow} \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}$ notée plutôt $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ où on dérive l'expression $f(x,y)$ une première fois par rapport à y pour obtenir $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, que l'on dérive une deuxième fois par rapport à y pour obtenir $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$;

Les quatre applications $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} : (x,y) \longmapsto \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : (x,y) \longmapsto \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} : (x,y) \longmapsto \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} : (x,y) \longmapsto \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$ ainsi définies sont appelées les érivées partielles d'ordre 2 de f.

Pour les deux dérivées croisées $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, l'ordre de dérivation se lit de la droite vers la gauche.

$$\underset{\text{Ordre de dérivation}}{\underleftarrow{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}}} \qquad \underset{\text{Ordre de dérivation}}{\underleftarrow{\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}}}$$

□

Exemple 3 – Calcul de dérivées partielles d'ordre 2

Déterminer les dérivées partielles d'ordre 2 de $f : (x,y) \longmapsto y\mathrm{e}^{-x^2-y}$.

□

Remarque 2 – Notation générique $\partial^2_{1,1}f$, $\partial^2_{1,2}f$, $\partial^2_{2,1}f$ et $\partial^2_{2,2}f$ des dérivées partielles d'ordre 2

Les notations $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ sont clairement attachées aux noms des variables utilisées dans l'expression définissant f, mais bien pratiques car porteuses de sens par rapport aux variables manipulées.

Comme pour les dérivées partielles d'ordre 1, on priviligiera une notation qui fait référence à la notion de « 1^e^ variable » et de « 2^e^ variable » pour la fonction manipulée :

Ainsi :
- $\partial^2_{1,1}f$ désignera la dérivée partielle d'ordre 2 de la fonction f obtenue en dérivant deux fois par rapport à sa 1^e^ variable ;
- $\partial^2_{1,2}f$ désignera la dérivée partielle d'ordre 2 de la fonction f obtenue en dérivant une première fois par rapport à sa 2^e^ variable puis par rapport à sa 1^e^ variable ;
- $\partial^2_{1,2}f$ désignera la dérivée partielle d'ordre 2 de la fonction f obtenue en dérivant une première fois par rapport à sa 1^e^ variable puis par rapport à sa 2^e^ variable ;
- $\partial^2_{2,2}f$ désignera la dérivée partielle d'ordre 2 de la fonction f obtenue en dérivant deux fois par rapport à sa 2^e^ variable ;

Là encore, pour les deux dérivées croisées $\partial^2_{2,1}f$ et $\partial^2_{1,2}f$, l'ordre de dérivation se lit de la droite vers la gauche

$\partial^2_{2,1}f$ $\longleftarrow$ Ordre de dérivation

$\partial^2_{1,2}f$ $\longleftarrow$ Ordre de dérivation

Déterminer les dérivées partielles d'ordre 2 de $g : (m,n) \longmapsto m^2 - n^2 - mn + m - 2n + 3$ en utilisant ces notations.

□

CC BY NC ND

4. À propos de la régularité d'une fonction de deux variables

Contexte

Dans tout ce paragraphe f désigne une fonction de deux variables définie sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Les éléments présentés dans ce paragraphe sont culturels dans le sens où ils sont nécessaires pour formaliser d'autres notions, mais ne sont pas exigibles en soi.

□

Définition 7 – Limite en un point $a = (a_1, a_2) \in \Omega$

Soit (a_1, a_2) un point adhérent à Ω[a]. On dit que f admet le réel ℓ pour limite en (a_1, a_2) lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (x, y) \in \Omega, \|(x, y) - (a_1, a_2)\| \leq \alpha \Longrightarrow |f(x, y) - \ell| \leq \varepsilon$$

Lorsque c'est le cas, on notera $f(x, y) \underset{(x,y)\to(a_1,a_2)}{\longrightarrow} \ell$.

On dispose d'énoncés équivalents à ceux connus pour le calcul de limites de fonctions numériques de $\underset{\subset \mathbb{R}}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$.

□

a. L'idée c'est d'aller chercher la limite de f en des éléments de Ω vers lesquels le couple de variables (x, y) peut se rapprocher au sens de la distance entre deux éléments de $\mathbb{R}^2$.

Remarque 3 – Une subtilité à garder en tête

On considère $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{array} \right.$. Il est clair que :

- $\forall x \neq 0, \quad f(x, 0) = \dfrac{x \times 0}{x^2 + 0} = 0$ et ainsi que $f(x, 0) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$
- $\forall y \neq 0, \quad f(0, y) = \dfrac{0 \times y}{0 + y^2} = 0$ et ainsi que $f(0, y) \underset{y \to 0}{\longrightarrow} 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, x) = \dfrac{x^2}{x^2 + x^2} = \dfrac{1}{2}$ et ainsi $f(x, x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$

Autrement dit, f n'a pas de limite en $(0, 0)$. En effet, lorsque l'on regarde $f(x, 0)$, on fait tendre le couple (x, y) vers le couple $(0, 0)$ mais dans une direction fixée. De même pour $f(0, y)$ et $f(x, x)$, et il faudrait ainsi « balayer toutes les directions possibles » pour arriver au couple $(0, 0)$ en espérant qu'à chaque fois, on obtienne la même limite.

□

Définition 8 – Continuité

- Soit $(a_1, a_2) \in \Omega$. On dit que f est continue en (a_1, a_2) lorsque $f(x, y) \underset{(x,y)\to(a_1,a_2)}{\longrightarrow} f(a_1, a_2)$.
- On dit que f est continue sur Ω lorsque f est continue en tout point de Ω.

□

Proposition 3 – Opérations sur les fonctions continues de deux variables

Structure vectorielle : L'ensemble des fonctions continues sur Ω forme un $\mathbb{R}-$espace vectoriel que l'on peut encore noter $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$.

Produit et quotient Soit $(a_1, a_2) \in \Omega$. On considère $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que f et g sont continues en (a_1, a_2).

- l'application $f \times g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue en (a_1, a_2).
- si $g(a_1, a_2) \neq 0$ l'application $\dfrac{f}{g} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue en (a_1, a_2).

□

Composition Soit $(a_1, a_2) \in \Omega$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ continue en (a_1, a_2) à valeurs dans $f(A) = \Theta \subset \mathbb{R}$ et $g : \Theta \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en $f(a_1, a_2)$.
Alors l'application $g \circ f$ est une fonction définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ et continue en (a_1, a_2).

$$\begin{tikzcd}
\Omega \subset \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] & \Theta \subset \mathbb{R} \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \\
(x,y) \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & f(x,y) & g(f(x,y))
\end{tikzcd}$$

Définition 9 – Partie ouverte de $\mathbb{R}^2$

Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$. On dit que la partie A est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ si A est l'ensemble vide, ou si pour tout $(a_1, a_2) \in A$, il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}_o((a_1, a_2), r) \subset A$.
En particulier les boules ouvertes de $\mathbb{R}^n$ sont des parties ouvertes de $\mathbb{R}^2$.

Intuitivement, une partie ouverte A de $\mathbb{R}^2$ peut être vue comme un agglomérat de boules ouvertes toutes incluses dans A et qui recouvrent tout A sans jamais déborder sur la frontière.

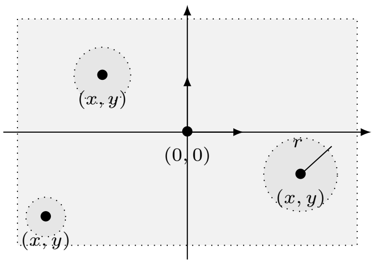
□

Exemple 4 – Pavés de $\mathbb{R}^2$

L'ensemble

$$\mathcal{E}_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ -3 < x < 3 \text{ et } -2 < y < 2\right\}$$

est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.



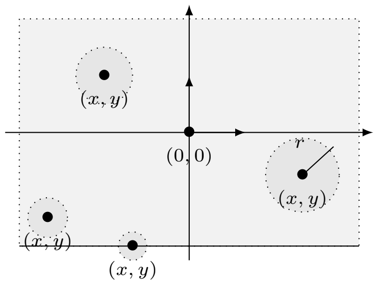
Pour tout $(x, y) \in \mathcal{E}_1$, on peut trouver un réel $r > 0$ tel que la boule ouverte de centre (x, y) et de rayon r soit complètement incluse dans $\mathcal{E}$.

□

Par contre l'ensemble

$$\mathcal{E}_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ -3 < x < 3 \text{ et } -2 \leq y < 2\right\}$$

n'est pas une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.



En effet, tous les couples $(x, -2)$ avec $-3 < x < 3$ appartiennent à $\mathcal{E}_2$, mais pour ces derniers on ne peut pas trouver un réel $r > 0$ tel que la boule ouverte de centre $(x, -2)$ et de rayon r soit complètement incluse dans $\mathcal{E}$.

Définition 10 – Application de classe $\mathcal{C}^1$

Si $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont définies et continues sur une partie ouverte Ω de $\mathbb{R}^2$, alors on dit que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

□

Proposition 4 – Opérations sur les applications de classe $\mathcal{C}^1$

Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur une partie ouverte Ω de $\mathbb{R}^2$, alors :

- pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, l'application $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.
- l'application $f \times g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.
- Si g ne s'annule pas sur Ω, alors l'application $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

□

Définition 11 – Application de classe $\mathcal{C}^2$

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur une partie ouverte Ω de $\mathbb{R}^2$ lorsque toutes ses dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 existent et sont continues sur Ω.

□

Proposition 5 – Opérations sur les applications de classe $\mathcal{C}^2$

Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux applications de classe $\mathcal{C}^2$ sur une partie ouverte Ω de $\mathbb{R}^2$, alors :

- pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, l'application $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω.
- l'application $f \times g$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω.
- Si g ne s'annule pas sur Ω, alors l'application $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω.

□

5. Théorème de Schwarz

Théorème 1 – Théorème de Schwarz

Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur une partie ouverte Ω de $\mathbb{R}^2$, alors :

$$\forall (a_1, a_2) \in \Omega, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a_1, a_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a_1, a_2)$$

ou encore : $\forall (a_1, a_2) \in \Omega,\ \partial^2_{1,2} f(a_1, a_2) = \partial^2_{2,1} f(a_1, a_2)$.

On pourra retenir ce résultat par « les dérivées croisées sont égales » pour les fonctions suffisamment régulières sur une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

□

Il existe des applications de $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ (simples) pour lesquelles ces dérivées secondes croisées ne sont pas égales au moins en quelques points de $\mathbb{R}^2$.

Par exemple, pour $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array} \right.$ on montre que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1$.

Remarque 4 – Situations à venir

Dans la pratique, les fonctions de deux variables rencontrées sont définies et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ qui est trivialement une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.
Ainsi, pour ce qui nous concerne, les dérivées partielles d'ordre 2 croisées sont toujours égales, mais dans l'absolu on citera le théorème de Schwarz avant de procéder au calcul.

□

CC BY NC ND