AN14

# Intégrales généralisées

Version du 20-10-2022 à 12:39

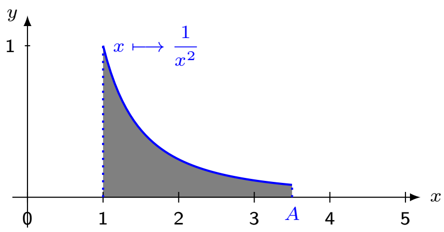
## 1. Situations à méditer

**Introduction**

Soit $A \in \mathbb{R}_+$. On désigne par

$$\mathcal{D}_A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 1 \leq x \leq A,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{x^2} \right\}$$

qui correspond au domaine grisé ci-dessous :




Que se passe-t-il pour l'aire de $\mathcal{D}_A$ lorsque $A$ tend vers $+\infty$ ?

En interprêtant l'aire de $\mathcal{D}_A$ en terme d'intégrale, on a :

$$\begin{aligned} \text{Aire}\,(\mathcal{D}_A) &= \int_1^A \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^A \\ &= -\frac{1}{A} + 1 \\ &\xrightarrow[A\to+\infty]{} 1 \end{aligned}$$

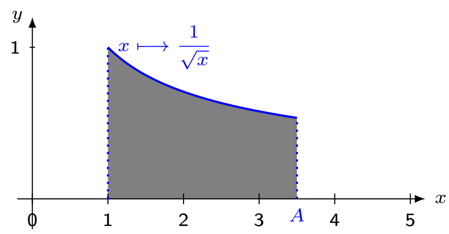
Géométriquement le domaine $\mathcal{D}_A$ est de taille « infinie » lorsque $A$ tend vers $+\infty$, mais paradoxalement l'aire du domaine correspondant tend vers la valeur 1.

Dans ce cas là, on peut donner du sens à l'écriture $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ où l'on parlera alors d'intégrale convergente et on pourra même en donner une valeur en écrivant $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1$. $\square$

Soit $A \in \mathbb{R}_+$. On désigne par

$$\mathcal{D}_A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 1 \leq x \leq A,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \right\}$$

qui correspond au domaine grisé ci-dessous :




Que se passe-t-il pour l'aire de $\mathcal{D}_A$ lorsque $A$ tend vers $+\infty$ ?

En interprêtant l'aire de $\mathcal{D}_A$ en terme d'intégrale, on a :

$$\begin{aligned} \text{Aire}\,(\mathcal{D}_A) &= \int_A^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[ 2\sqrt{x} \right]_1^A \\ &= 2\sqrt{A} - 2 \\ &\xrightarrow[A\to+\infty]{} +\infty \end{aligned}$$

Géométriquement le domaine $\mathcal{D}_A$ est de taille « infinie » lorsque $A$ tend vers $+\infty$ et l'aire du domaine correspondant diverge vers $+\infty$.

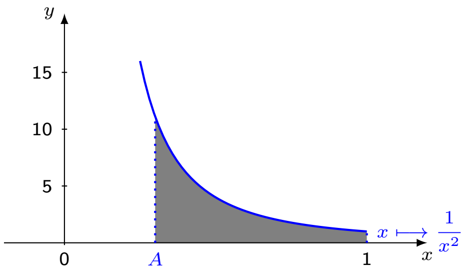
Dans ce cas là, on ne peut pas donner du sens à l'écriture $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ où l'on parlera alors d'intégrale divergente.

## Introduction

Soit $A \in \mathbb{R}_+$. On désigne par

$$\mathcal{D}_A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ A \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{x^2} \right\}$$

qui correspond au domaine grisé ci-dessous :




Que se passe-t-il pour l'aire de $\mathcal{D}_A$ lorsque $A$ tend vers $0$ ?

En interprêtant l'aire de $\mathcal{D}_A$ en terme d'intégrale, on a :

$$\begin{aligned} \text{Aire}\,(\mathcal{D}_A) &= \int_A^1 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[ -\frac{1}{x} \right]_A^1 \\ &= -1 + \frac{1}{A} \\ &\underset{A \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty \end{aligned}$$

Géométriquement le domaine $\mathcal{D}_A$ est de taille « infinie » lorsque $A$ tend vers $0$ et l'aire du domaine correspondant diverge vers $0$.

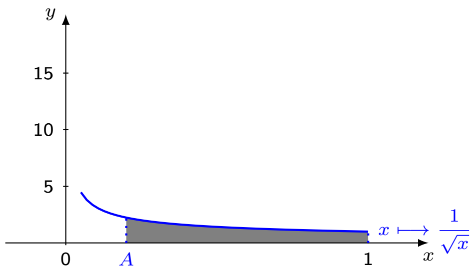
Dans ce cas là, on ne peut pas donner du sens à l'écriture $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ où l'on parlera alors d'intégrale divergente.

□

Soit $A \in \mathbb{R}_+$. On désigne par

$$\mathcal{D}_A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ A \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \right\}$$

qui correspond au domaine grisé ci-dessous :




Que se passe-t-il pour l'aire de $\mathcal{D}_A$ lorsque $A$ tend vers $0$ ?

En interprêtant l'aire de $\mathcal{D}_A$ en terme d'intégrale, on a :

$$\begin{aligned} \text{Aire}\,(\mathcal{D}_A) &= \int_A^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \\ &= [2\sqrt{x}]_A^1 \\ &= 2 - 2\sqrt{A} \\ &\underset{A \to 0}{\longrightarrow} 2 \end{aligned}$$

Géométriquement le domaine $\mathcal{D}_A$ est de taille « infinie » lorsque $A$ tend vers $0$, mais paradoxalement l'aire du domaine correspondant tend vers la valeur 2.

Dans ce cas là, on peut donner du sens à l'écriture $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ où l'on parlera alors d'intégrale convergente et on pourra même en donner une valeur en écrivant $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2$.

## Remarque 1 – Comment a-t-on donné du sens ?

On a donné du sens aux deux écritures $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ en posant :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{A \to +\infty} \int_1^A \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{A \to 0} \int_A^0 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

Le but de ce chapitre est de donner du sens aux écritures $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ où $f$ n'est continue que sur $[a; b[$, $]a; b]$ ou $]a; b[$ avec $a$ et $b$ éventuellement infinis.

□

# 2. Intégrales généralisées et notion d'intégrale impropre

**Contexte**

Dans toute la suite de ce chapitre, sauf mention contraire, $a$ et $b$ désigneront deux éléments de $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ avec $a < b$.

□

**Définition 1 – Notion d'intégrale impropre**

On appelle intégrale généralisée ou intégrale impropre toute intégrale de la forme $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ où $f$ est une fonction numérique **continue** sur $]a;b]$, $[a;b[$ ou $]a;b[$.

| Pour $f : ]a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ | Pour $f : [a;b[ \longrightarrow \mathbb{R}$ | Pour $f : ]a;b[ \longrightarrow \mathbb{R}$ |
|---|---|---|
| $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est impropre en $a$ | $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est impropre en $b$ | $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est impropre en $a$ et $b$ |
| $\displaystyle\int_{\to a}^b f(t)\,\mathrm{d}t$ | $\displaystyle\int_a^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ | $\displaystyle\int_{\to a}^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ |

□

**Exemple 1 – Repérer le caractère impropre d'une intégrale**

Pour toutes les intégrales suivantes, donner l'ensemble sur lequel la fonction à intégrer est continue et préciser la ou les bornes en lesquelles elles sont impropres.

$f : t \longmapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ est continue sur : . . . . . . . . . . . . . . . . .

$\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(t)\,\mathrm{d}t$ est impropre en : . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$ est impropre en : . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$f : t \longmapsto \dfrac{1}{\ln(t-1)}$ est continue sur : . . . . . . . . . . . . .

$\displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$ est impropre en : . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$\displaystyle\int_1^{2} f(t)\,\mathrm{d}t$ est impropre en : . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$f : t \longmapsto \dfrac{1}{1-t^2}$ est continue sur : . . . . . . . . . . . . . . . .

$\displaystyle\int_0^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$ est impropre en : . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$\displaystyle\int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$ est impropre en : . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est impropre en : . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(t)\,\mathrm{d}t$ est impropre en : . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$f : t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur : . . . . . . . . . . . . . .

$\displaystyle\int_0^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$ est impropre en : . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$\displaystyle\int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$ est impropre en : . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$ est impropre en : . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$ est impropre en : . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$f : t \longmapsto \dfrac{1}{\ln(1-t^2)}$ est continue sur : . . . . . . . . . . . .

$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$ est impropre en : . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$ est impropre en : . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$\displaystyle\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$ est impropre en : . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$\displaystyle\int_0^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$ est impropre en : . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$f : t \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$ est continue sur : . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$\displaystyle\int_0^{\mathrm{e}} f(t)\,\mathrm{d}t$ est impropre en : . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$ est impropre en : . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est impropre en : . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

□

## 3. Intégrales définies et faussement impropre

**Définition 2 – Cas d'une fonction continue sur un segment**

On rappelle que si $f$ est continue sur $[a;b]$ alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ n'est pas une intégrale impropre.
On parle alors plutôt d'intégrale définie.

□

**Théorème 1 – Intégrale faussement impropre**

Si $f : ]a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ est telle que : $\left\{ \begin{array}{lcl} f & \text{est continue sur} & ]a;b] \\ f & \text{est prolongeable par continuité en} & a \end{array} \right.$

alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est une intégrale définie[a] et on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)$ est faussement impropre en $a$.

□

a. C'est à dire que ce n'est pas une intégrale impropre

**Exemple 2 – Une intégrale faussement impropre**

? L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t\ln(t)\,\mathrm{d}t$ est-elle impropre en $0$ ?

□

**Remarque 2 – Extension pour une fonction prolongeable par continuité à droite**

Ce résultat se transpose aux fonctions numériques où $\left\{ \begin{array}{lcl} f & \text{est continue sur} & [a;b[ \\ f & \text{est prolongeable par continuité en} & b \end{array} \right.$

□

## 4. Intégrale généralisée sur un intervalle semi-ouvert

**Définition 3 – Intégrale convergente sur intervalle un semi-ouvert**

Soit $f : [a;b[ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a;b[$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \overline{\mathbb{R}}$.

On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente lorsque la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque $x$ tend vers $b$ avec $x \in [a;b[$.

Lorsque c'est le cas, on pose : $$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \underbrace{\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t}_{\text{nombre réel fini}}$$

**Terminologie | Formulation**

L'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et a pour valeur $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{\substack{\text{la valeur que l'on a trouvé pour}\\ \lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t}}$.

Dans le cas contraire, on dira que l'intégrale est divergente.

**Parallèle avec les séries numériques**

| Série convergente | Intégrale convergente sur $[a;b[$ |
|---|---|
| La série numérique $\sum u_n$ est convergente lorsque : $\underbrace{S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k}_{\text{Suite des sommes partielles}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$ | L'intégrale $\displaystyle\int_a^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente lorsque : $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to b}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$ |
| $\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} u_k}_{\text{Somme de la série}} = \underbrace{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k}_{\ell}$ | $\underbrace{\displaystyle\int_a^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t}_{\text{Valeur de l'intégrale}} = \underbrace{\lim_{x\to b} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t}_{=\ell}$ |

□

**Remarque 3 – Extension à d'autres formes d'intervalles semi-ouvert**

Pour $f : ]a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $]a;b]$ avec $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $b \in \mathbb{R}$, on définit de même la notion de convergence et de valeur pour $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ en posant :

$$\int_{\to a}^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{\substack{\text{lorsque cela}\\ \text{a du sens}}}{=} \lim_{\substack{x\to a\\ a<x}} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

□

**Remarque 4 – Étude d'une intégrale impropre | Convergence | Valeur**

| Problème n° 1 | Problème n° 2 |
|---|---|
| Est-ce que l'intégrale est convergente ? | Quelle est alors sa valeur ? |

Étudier la nature d'une intégrale impropre, c'est répondre au problème n° 1 dans premier temps, et on traite « ensuite » le problème n° 2.

□

**Exemple 3 – Une intégrale impropre à connaître...**

?

Étudier la convergence et déterminer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$.

□

**Exemple 4 – Une autre intégrale impropre à connaître...**

?

Établir la convergence et déterminer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

□

**Application|** [3766] **| 1| Valeur et convergence d'une intégrale impropre**

Étudier la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t\,(\ln(t))^2}\,\mathrm{d}t$ puis en déterminer le cas échéant sa valeur.

□

**Application|** [3767] **| 2| Valeur et convergence d'une intégrale impropre**

Étudier la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{1}{t\,(\ln(t))^2}\,\mathrm{d}t$ puis en déterminer le cas échéant sa valeur.

□

# 5. Indépendance du choix des bornes d'intégration

**Théorème 2 – Indépendance du choix d'une des bornes d'intégration**

Soit $f : [a;b[ \longrightarrow \mathbb{R}$ où $b \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f$ continue sur $[a;b[$.

Pour tout $\alpha \in [a;b[$, les deux intégrales impropres $\displaystyle\int_a^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^{\to} b f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

□

**Éléments de preuve:**

**Exemple 5 – Changement de borne définie**

Pour tout $\alpha \in ]0;+\infty[$, les deux intégrales impropres $\displaystyle\int_1^{\to+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^{\to+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

□

# 6. Intégrale impropre en ses deux bornes

**Définition 4 – Intégrale impropre en ses deux bornes**

Soit $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ et $f : ]a;b[ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $]a;b[$.

On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_{\to a}^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente lorsque il existe $c$ tel que :

| | | |
|---|---|---|
| $c \in ]a;b[$ | $\displaystyle\int_{\to a}^{c} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente | $\displaystyle\int_{c}^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente |

Lorsque c'est le cas

$$\int_{\to a}^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t = \underbrace{\int_{\to a}^{c} f(t)\,\mathrm{d}t}_{\substack{\text{Valeur que l'on obtient}\\ \text{avec } \lim_{x\to a}\int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t}} + \underbrace{\int_{c}^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t}_{\substack{\text{Valeur que l'on obtient}\\ \text{avec } \lim_{x\to b}\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t}}$$

□

**Théorème 3 – Indépendance du choix du découpage**

Soit $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ et $f : ]a;b[ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $]a;b[$.
Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

| | |
|---|---|
| Il existe $c \in ]a;b[$ tel que les deux intégrales $\displaystyle\int_{\to a}^{c} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{c}^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes | Pour tout $d \in ]a;b[$ les deux intégrales $\displaystyle\int_{\to a}^{d} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{d}^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes |

□

**Point méthode 1 – Étudier la convergence d'une intégrale impropre en ses deux bornes**

Soit $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ et $f : ]a; b[ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $]a; b[$.

Pour déterminer la nature de l'intégrale impropre en ses deux bornes $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ :

- On choisit un réel $c$ quelconque dans $]a; b[$ ;
- On étudie la convergence de la première intégrale $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ qui est seulement impropre en $a$ ;
- On étudie la convergence de la deuxième intégrale $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ qui est seulement impropre en $b$ ;
- On conclut quant à la convergence de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ par :

  Si les deux intégrales précédentes sont convergentes, alors on peut conclure que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, et on peut, si l'on dispose des valeurs de $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$, donner la valeur de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

  Si l'une des deux intégrales précédentes est divergente, alors on peut conclure que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente.

□

**Exemple 6 – Intégrale doublement impropre**

? Étudier la convergence et déterminer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t)+t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$. En effectuant l'intégration par parties suivante dans l'intégrale $\displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{\ln(1-t)+t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ en posant :

$$
\begin{array}{lcl}
u(t) = -\dfrac{1}{t} & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & u'(t) = \dfrac{1}{t^2} \\
v(t) = \ln(1-t) + t & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & v'(t) = -\dfrac{1}{1-t} + 1
\end{array}
$$

où $u$ et $v$ sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha; \beta]$, on obtient :

□

# 7. Opérations sur les intégrales impropres

**Contexte**

Dans ce paragraphe, $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ et $\left\{ \begin{array}{l} f : I \longrightarrow \mathbb{R} \\ g : I \longrightarrow \mathbb{R} \end{array} \right.$ continues sur $I$ où $I = [a;b[$, $]a;b]$ ou $]a;b[$. □

**Proposition 1 – Combinaison linéaire d'intégrales impropres convergentes**

Multiplication par une constante

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b \lambda f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature, et en cas de convergence on a : $\int_a^b \lambda f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

Combinaison linéaire

Si les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes,

alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ l'intégrale $\int_a^b (\lambda f(t) + g(t))\,\mathrm{d}t$ est convergente et on a :

$$\int_a^b (\lambda f(t) + g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

□

**Proposition 2 – Somme d'une intégrale convergente et divergente**

Si l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente et l'intégrale $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente,

alors l'intégrale $\int_a^b (f(t) + g(t))\,\mathrm{d}t$ est divergente. □

**Éléments de preuve:**

**Remarque 5 – Somme de deux intégrales divergentes**

Pour $\int_a^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ qui diverge, on a $\int_a^{\to b} (-f(t))\,\mathrm{d}t$ qui diverge aussi.
Mais $\int_a^{\to b} (f(t) + (-f(t)))\,\mathrm{d}t$ converge car il s'agit de $\int_a^{\to b} \tilde{0}(t)\,\mathrm{d}t$.

Pour $\int_a^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ qui diverge, $\int_a^{\to b} (f(t) + f(t))\,\mathrm{d}t$ diverge car il s'agit de $\int_a^{\to b} 2f(t)\,\mathrm{d}t$ qui est de même nature que $\int_a^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$.

□

**Théorème 4 – Caractére défini de la notion d'intégrale impropre**

Soient $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ où $I = [a;b[$, $]a;b]$ ou $]a;b[$ avec $f$ continue sur $I$.

Si $f$ est telle que : $\begin{cases} \forall t \in I,\ f(t) & \geq & 0 \\ \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t & \text{est} & \text{convergente} \\ \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t & = & 0 \end{cases}$ , alors on a : $\forall t \in I, \quad f(t) = 0\,.$

□

C'est à dire $f$ est la fonction nulle sur $I$.

## 8. Intégrales de référence

**Théorème 5 – Intégrales de Riemann**

**Riemann en 0**

$$\left(\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \text{ est convergente}\right) \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha < 1)$$

Lorsque $\alpha < 1$, on a alors : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-\alpha}$

**Riemann en $+\infty$**

$$\left(\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \text{ est convergente}\right) \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha > 1)$$

Lorsque $\alpha > 1$, on a alors : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha-1}$

□

**Éléments de preuve:**

**Théorème 6 – Convergence et valeur de $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t} \mathrm{d}t$**

Pour $\alpha > 0$

$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\, \mathrm{d}t$ est convergente

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}$$

Pour $\alpha > 0$

$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\alpha t}\, \mathrm{d}t$ est divergente

□

**Éléments de preuve:**

**Application| [4551] | 3| Repérer des intégrales convergentes**

Parmi les intégrales impropres suivantes, lesquelles sont convergentes ?

| | | |
|---|---|---|
| $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{t^2}\, \mathrm{d}t$ | $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{3t}}\, \mathrm{d}t$ | $\int_{\frac{1}{3}}^{+\infty} \frac{\pi}{t\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t$ |
| $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{2t}\, \mathrm{d}t$ | $\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t$ | $\int_0^{1} \frac{1}{2t}\, \mathrm{d}t$ |
| $\int_1^{+\infty} \frac{2}{3^t}\, \mathrm{d}t$ | $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^3}\, \mathrm{d}t$ | $\int_0^{1} \frac{2}{3\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t$ |

□

# 9 . Notion d'absolue convergence

**Contexte**

Dans ce paragraphe, $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $I$ où $I = [a;b[$, $]a;b]$ ou $]a;b[$.

□

**Définition 5 – Intégrale absolument convergente**

On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente lorsque l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente.

□

**Théorème 7 – Lien convergence absolue et convergence | ADMIS**

Si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente , alors l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente .

La réciproque est fausse.

□

**Exemple 7**

Justifier la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

□

## 10. Théorème de « comparaison »

**Théorème 8 – Théorème dit de « comparaison des intégrales impropres de fonctions positives »**

Soient $f : [a;b[ \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a;b[ \longrightarrow \mathbb{R}$ continues sur $[a;b[$ où $b \in \overline{\mathbb{R}}$.
On suppose que l'on a : $\forall t \in [a;b[, \quad 0 \leq f(t) \leq g(t)$

| Majoration par une intégrale convergente | Minoration par une intégrale divergente |
| --- | --- |
| **Si** l'intégrale $\int_a^{\to b} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, **alors** $\int_a^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. | **Si** l'intégrale $\int_a^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, **alors** $\int_a^{\to b} g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge. |

**Inégalité en cas de convergence**

En cas de convergence, on a notamment que :

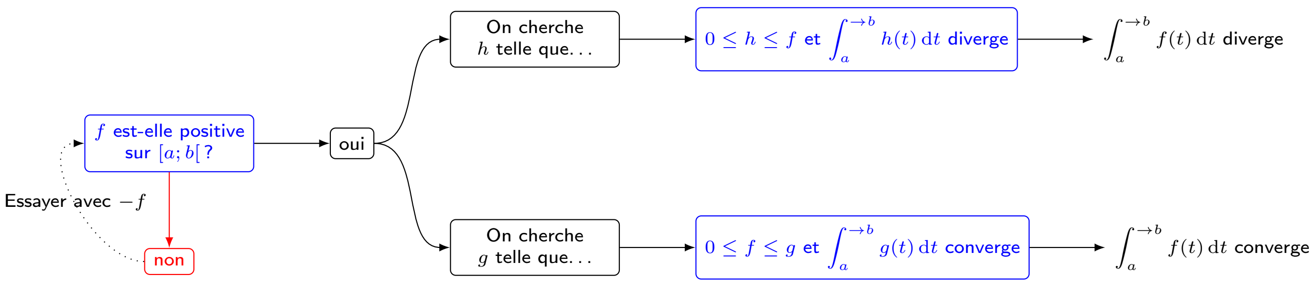
$$0 \leq \int_a^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^{\to b} g(t)\,\mathrm{d}t$$

**Transposition aux autres formes d'intégrales impropres**

Ce théorème se transpose directement pour des fonctions $f : ]a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ou pour des fonctions négatives.

□

**Point méthode 2 – Étudier la convergence à l'aide du théorème de comparaison pour $\int_a^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$**




Dans tous les cas, on veillera à ce qu'il figure dans notre rédaction au moins une phrase telle que :
*« d'après le théorème de comparaison des intégrales impropres de fonctions positives... »*

□

**Application|[3771]| 4| Utilisation du théorème de comparaison**

Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{2+\sin(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ est divergente.

□

**Application| [3770] | 5| Utilisation du théorème de comparaison**

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+\sin(t)}{1+\sqrt{t^3}}\,\mathrm{d}t$ est convergente. □

**Théorème 9 – Convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$**

L'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

**Convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$**

L'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ est convergente et en particulier : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.$

On peut montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$ .

□

**Éléments de preuve:**

# 11. Critère de Riemann et négligeabilité

**Théorème 10 – Relation de négligeabilité et convergence**

Soient $(a,b) \in \mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}$ avec

$$\begin{cases} f : [a;b[ \longrightarrow \mathbb{R} \text{ positive sur } [a;b[ \\ g : [a;b[ \longrightarrow \mathbb{R} \end{cases}$$

continues sur $[a;b[$.

Si $f(t) \underset{t\to b^-}{=} o(g(t))$ et $\displaystyle\int_a^{\to b} g(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente,

alors $\displaystyle\int_a^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

□

**Éléments de preuve:**

**Exemple 8 – Intégrale de Gauss**

? Montrer que $\mathrm{e}^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Qu'en déduire pour $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ ?

□

# 12 . Théorème « d'équivalence »

**Théorème 11 – Théorème dit « d'équivalence pour les intégrales impropres de fonctions positives »**

Soient $f : [a; b[ \longrightarrow \mathbb{R}$ où $f$ est continue sur $[a; b[$ avec $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $f$ positive sur $[a; b[$.

Si $g$ est une fonction définie et continue sur un voisinage de $b \in \overline{\mathbb{R}}$ telle que [a] : $f(t) \underset{t \to b^-}{\sim} g(t)$

alors les deux intégrales $\displaystyle\int_a^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^{\to b} g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature

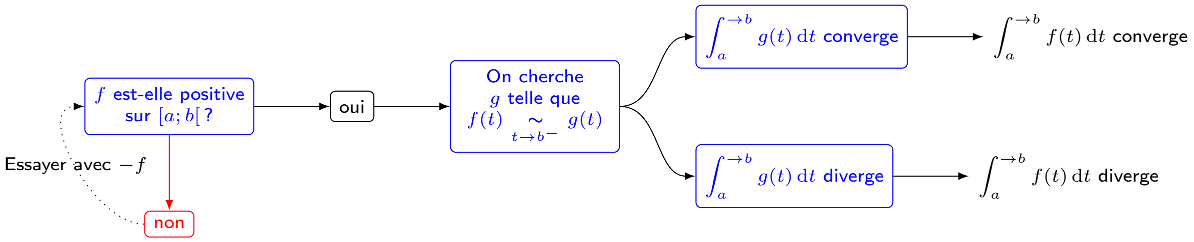
a. On sait en particulier que dans ce cas, $g$ est du même signe de $f$ au voisinage de $b$, c'est à dire que $g$ est positive sur ce voisinage.

**Transposition aux fonctions de signe constant et aux autres formes d'intégrales impropres**

Ce dernier se transpose directement pour $f : ]a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et plus généralement avec des fonctions de signe constant.

□

**Point méthode 3 – Étudier la convergence à l'aide du théorème déquivalence pour $\displaystyle\int_a^{\to b} f(t)\,\mathrm{d}t$**




Dans tous les cas, on veillera à ce qu'il figure dans notre rédaction au moins une phrase telle que : *« d'après le théorème d'équivalence des intégrales impropres de fonctions positives. . . »*

□

**Application| [3773] | 6| Utilisation du théorème d'équivalence**

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

□

**Théorème 12 – Règle du $t^\alpha f(t)$ en $+\infty$**

Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : [a;+\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a;+\infty[$.

Si il existe $\alpha > 1$ tel que

$$t^\alpha f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$$

alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Si il existe $\alpha \leq 1$ tel que

$$t^\alpha f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}^* \cup \{+\infty\}$$

alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente.

□

**Éléments de preuve:**

**Théorème 13 – Règle du $t^\alpha f(t)$ en $0$**

Soient $b \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : ]0;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $]0;b]$.

Si il existe $\alpha \geq 1$ tel que

$$t^\alpha f(t) \underset{t\to0^+}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}^* \cup \{+\infty\}$$

alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente.

Si il existe $\alpha < 1$ tel que

$$t^\alpha f(t) \underset{t\to0^+}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$$

alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

□

**Exemple 9 – Vers la fonction $\Gamma$**

? Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

□

## 13. Intégration par parties pour $\displaystyle\int_a^{\to b} f(t)\mathrm{d}t$ | Borderline...

**Proposition 3 – Intégration par parties sur une intégrale impropre | ADMIS | Pour les experts uniquement...**

Soit $(a,b) \in \mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}$ et $\left\{ \begin{array}{l} f : [a;b[ \longrightarrow \mathbb{R} \\ g : [a;b[ \longrightarrow \mathbb{R} \end{array} \right.$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b[$.

Si $f(t) \times g(t) \underset{t \to b^-}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$, alors les deux intégrales impropres $\displaystyle\int_a^{\to b} f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^{\to b} f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

En cas de convergence, on a : $$\int_a^{\to b} f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \underbrace{[f(t) \times g(t)]_a^{\to b}}_{=\ell - f(a)\times g(a)} - \int_a^{\to b} f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

□

**Exemple 10 – Relation entre $\Gamma(n)$ et $\Gamma(n+1)$**

Déterminer une relation entre $\Gamma(n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{n-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ et $\Gamma(n+1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{n}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ puis en déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{n-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = (n-1)!$.

□

# 14 . Cas des fonctions continues par morceaux

**Définition 6 – Fonctions continues par morceaux**

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$.
On dit que $f$ est continue par morceaux sur $[a; b]$ lorsqu'il existe une subdivision $(a_0, \ldots, a_n)$ de $[a; b]$ telle que pour tout $i \in [\![0; n-1]\!]$, la restriction de $f$ à $]a_i; a_{i+1}[$ peut se prolonger en une fonction continue sur $[a_i; a_{i+1}]$.

$\square$

**Définition 7 – Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$**

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux sur $[a; b]$.
On peut définir l'intégrale de $f$ sur $[a; b]$ par :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a_0}^{a_1} \tilde{f}_0(t)\,\mathrm{d}t + \int_{a_1}^{a_2} \tilde{f}_1(t)\,\mathrm{d}t + \ldots + \int_{a_{n-1}}^{a_n} \tilde{f}_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t$$

où $(a_0, \ldots, a_n)$ correspond à la subdivision définie dans la définition précédente, et $\tilde{f}_0, \ldots, \tilde{f}_{n-1}$ désignent les prolongements par continuité de $f$ sur chaque intervalle $[a_0; a_1], \ldots, [a_{n-1}; a_n]$.

On pourra ainsi étendre la notion d'intégrale impropre à des fonctions continues par morceaux sur leur ensemble de définition.

$\square$