AN13

Développements limités

Version du 07-10-2022 à 08:05

1 . Idée directrice des développements limités

Introduction – D'une somme géométrique à une approximation polynomiale

Pour tout $x \neq 1$, on sait que :
$$\begin{aligned} 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 &= \frac{1-x^5}{1-x} \\ &= \frac{1}{1-x} - \frac{x^5}{1-x} \end{aligned}$$

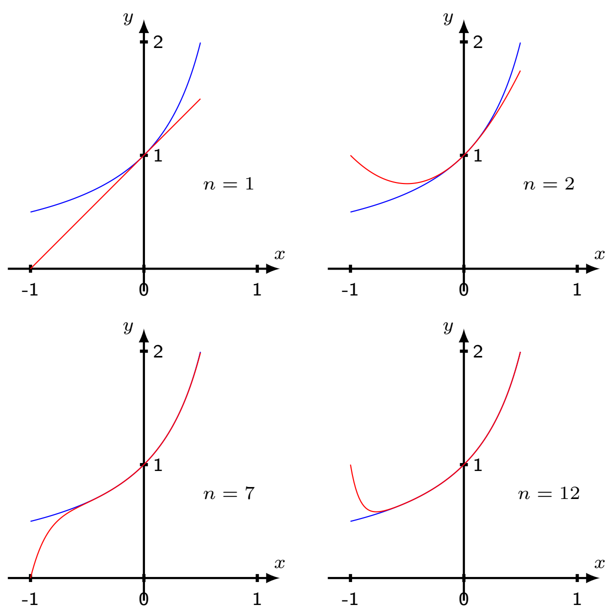
qui donne : $\forall x \neq 1,\ \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{f(x)} = \underbrace{1 + x + x^2 + x^3 + x^4}_{\substack{\text{expression}\\ \text{poynomiale } P(x)}} + \underbrace{\frac{x^5}{1-x}}_{\substack{\text{« Écart » entre}\\ \mathcal{C}_f \text{ et } \mathcal{C}_P}}$.

On constate que : $\forall x \neq 1,\ \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \underbrace{\underbrace{x^4 \times \underbrace{\frac{x}{1-x}}_{\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0}}_{\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0}}_{\substack{\text{L'écart entre } \mathcal{C}_f \text{ et } \mathcal{C}_g\\ \text{tend vers } 0 \text{ lorsque } x \text{ tend vers } 0}}$

On vient donc d'obtenir : $\forall x \neq 1,\ \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^4 \times \varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

En généralisant on a : $\forall x \neq 1,\ \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + x^n \times \varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $n \in \mathbb{N}$.

Les courbes représentatives des fonctions $x \longmapsto \frac{1}{1-x}$ et $x \longmapsto 1 + x + \ldots + x^n$ ont tendance à se « rapprocher » plus n est grand :



On peut dire que $1+x+\ldots+x^n$ est une « bonne » approximation polynomiale au voisinage de 0 de $\frac{1}{1-x}$.

□

2. Développement limité en 0 d'une fonction

Contexte

Dans ce paragraphe et sauf mention contraire, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $0 \in I$ ou est une borne finie de I, et on considère $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
On s'intéresse ainsi au « comportement » de f au voisinage de 0.

□

Définition 1 – Développement limité en 0

On dit que f admet un développement limité d'ordre n en 0, en abrégé $DL_n(0)$, lorsqu'il existe un polynôme P tel que :

Condition sur P

$$\deg(P) \leq n$$

Relation au voisinage de 0

$$f(x) = \underbrace{P(x)}_{\text{Partie régulière du } DL_n(0)} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

Lorsque ce développement limité existe, il est unique et c'est dans ce cas la meilleure approximation polynomiale de degré n de f au voisinage de 0.

Illustration

Donner le...

$DL_4(0)$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$.

Dans l'exemple introduction, on a vu que, pour tout $x \neq 1$,

$$\underbrace{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)}_{\text{C'est le développement limité en } 0 \text{ à l'ordre 4 recherché}}$$

□

Théorème 1 – Développement limité en 0 de $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$

Le $DL_n(0)$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$ est :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right) + \underset{x\to 0}{o}(x^n)\end{aligned}$$

Composition dans un développement limité

Si u est une fonction définie sur un voisinage de a et telle que $u(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$, alors on a :

$$\frac{1}{1-u(x)} = 1 + u(x) + u(x)^2 + \ldots + (u(x))^n + \underset{x\to a}{o}\left((u(x))^n\right)$$

Développement limité en 0 de $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$

Le $DL_n(0)$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$ est :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k\right) + \underset{x\to 0}{o}(x^n)\end{aligned}$$

□

Le $DL_5(0)$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$ est : $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \underset{x\to 0}{o}(x^5)$

3. Préalable à la manipulation des ordres des $\mathrm{DL}_n(0)$

Proposition 1 – Sens de la notation $\underset{x\to 0}{o}(x^n)$ et souplesse d'écriture

Soit $n \in \mathbb{N}$. On rappelle que : $\left(f(x) = \underset{x\to 0}{o}(x^n)\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c}\text{Sur un voisinage de } 0\text{, on a :}\\ f(x) = x^n \times \varepsilon(x) \\ \text{où } \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0\end{array}\right)$

On en déduit notamment que :

Absorption des puissances

Si $f(x) = \underset{x\to 0}{o}(x^n)$

alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\quad x^p \times f(x) = \underset{x\to 0}{o}(x^n)$

Éléments de preuve:
Puisque $f(x) = x^n \times \varepsilon(x)$, on a :

$$x^p \times f(x) = x^n \times \underbrace{x^p \times \varepsilon(x)}_{=\varepsilon_1(x)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0}$$

Comparaison en 0 des puissances de x | $(p,q) \in \mathbb{N}^2$

Si $p < q$ alors $x^q = \underset{x\to 0}{o}(x^p)$.

Éléments de preuve:
On a clairement que $\dfrac{x^q}{x^p} = x^{q-p}$ avec $q - p > 0$.

Absorption des puissances | $\lambda \in \mathbb{R}$ | $(p,n) \in \mathbb{N}^2$

$$\lambda \times x^p \times \underset{x\to 0}{o}(x^n) = \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

$$\underset{x\to 0}{o}(x^p) \times \underset{x\to 0}{o}(x^n) = \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

On comprendra cette dernière relation par « un produit de quelque chose négligeable devant x^p par quelque chose de négligeable devant x^n est négligeable devant x^n »

□

Exemple 1 – Obtention d'un développement limité par produit

? En remarquant que $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{1-x} \times \dfrac{1}{1+x}$, déterminer le $DL_4(0)$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x^2}$.

Comme $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$ et $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$, il vient en développant :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2) + x - x^2 + x^3 + x \times \underset{x\to 0}{o}(x^2) + x^2 - x^3 + x^4 \\ &\quad + x^2 \times \underset{x\to 0}{o}(x^2) - x^3 \times \underset{x\to 0}{o}(x^2) + x^4 \times \underset{x\to 0}{o}(x^2) + \underset{x\to 0}{o}(x^2) \times \underset{x\to 0}{o}(x^2) \\ &= 1 + x^2 + x^4 + \underbrace{\underset{x\to 0}{o}(x^2) \times \underbrace{\left(1 + x + x^2 - x^3 + x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)}_{=\underset{x\to 0}{\longrightarrow}1}}_{=\underset{x\to 0}{o}(x^2)}\end{aligned}$$

Donc : $\dfrac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$, mais ce n'est pas le $DL_4(0)$ recherché .

? Pourquoi ?

□

Théorème 2 – Troncature d'un développement limité en 0

Si f admet un $DL_n(0)$ de partie régulière P, alors pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, f admet un $DL_k(0)$ dont la partie régulière est obtenue en tronquant P au degré k.

$\square$

Application|[3356]| 1| Troncature de $\mathrm{DL}_n(0)$

Pour chaque fonction f donnée ci-après dont on donne un $DL_4(0)$, former alors son $DL_3(0)$ puis son $DL_2(0)$:

(1). $f(x) = 1 + \frac{x}{2} + x^3 + \frac{x^4}{3} + \underset{x\to0}{o}(x^4)$

(2). $f(x) = -2 + 3x - x^2 + x^4 + \underset{x\to0}{o}(x^4)$

$\square$

Proposition 2 – $\mathrm{DL}_n(0)$ d'une fonction paire/impaire | $\mathcal{D}_f$ symétrique par rapport à 0

Cas d'une fonction paire

Si f est une fonction **paire** admettant un $DL_n(0)$ de partie régulière P,
alors P n'est formé que de monômes de degré pair.

Cas d'une fonction impaire

Si f est une fonction **impaire** admettant un $DL_n(0)$ de partie régulière P,
alors P n'est formé que de monômes de degré impair.

$\square$

Remarque 1 – Parité/Imparité de la partie régulière

Cependant, la parité ou l'imparité de la partie régulière d'un $DL_n(0)$ ne donne aucune indication quant à une éventuelle parité/imparité de la fonction.

Par exemple, on peut montrer que : $\underbrace{(x^3-1)\cos(x)}_{f(x)} = \underbrace{\underbrace{-1+\frac{x^2}{2}}_{\text{partie régulière}} + \underset{x\to0}{o}(x^2)}_{DL_2(0) \text{ de } f}$. La partie régulière de ce $DL_2(0)$ est $x \longmapsto -1 + \frac{x^2}{2}$ et c'est une fonction paire, mais pourtant f ne l'est absolument pas !

$\square$

4. Développement limité en un point quelconque

Contexte

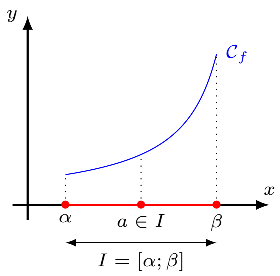
Dans ce paragraphe et sauf mention contraire, on considère $a \in \mathbb{R}$, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $a \in I$ ou est une borne finie de I, et f désigne une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

□

Introduction – Déphasage de la fonction vers 0 pour $I = [\alpha, \beta]$

Pour $a \in I$ ou borne finie de I

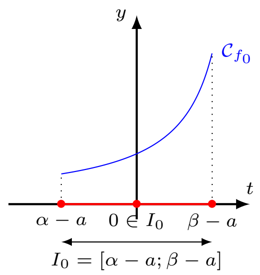
$$f : \begin{array}{|lcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$



Déphasage de la fonction d'origine

$$I_0 \quad = \quad \{t \in \mathbb{R},\, a + t \in I\}$$

$$f_0 : \begin{array}{|lcl} I_0 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f_0(t) = f(a+t) \end{array}$$



La fonction f_0 est définie sur un intervalle I_0 contenant 0 ou un voisinage de 0.

□

Définition 2 – Développement limité en $a \in I$ ou borne finie de I

On dit que f admet un dévelopement limité à l'ordre n au voisinage de a, en abrégé $DL_n(a)$ lorsque la fonction f_0 admet un développement limité d'ordre n en 0.

Lien entre le $DL_n(a)$ de f et le $DL_n(0)$ de f_0 | Pour $f : x \longmapsto f(x)$

Étape 1 | Changement de variable | $x = t + a$

$$f(x) \quad = \quad \underbrace{f(t+a)}_{=f_0(t)}$$

On a clairement équivalence entre « x tend vers a » et « t tend vers 0 »

Étape 2 | Travail sur $f_0(t)$

On cherche le $DL_n(0)$ de $f_0(t)$ c'est à dire :

$$f_0(t) = P(t) + \underset{t \to 0}{o}(t^n)$$

avec $\deg(P) \leq n$

Étape 3 | Écriture du $DL_n(a)$ de $f(x)$ | « Retour à x »

Puisque $x = t + a$ on a $t = x - a$ et donc $\underbrace{f_0(t)}_{=f(x)} = \underbrace{P(t)}_{=P(x-a)} + \underbrace{\underset{t \to 0}{o}(t^n)}_{\underset{x \to a}{o}((x-a)^n)}$

et donc : $\quad f(x) = P(x-a) + \underset{x \to a}{o}\left((x-a)^n\right)$

En pratique, on se ramènera toujours à un développement limité en 0 à l'aide du changement de variable $x = t + a$.

Illustration

On admet que le $DL_2(0)$ de la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{t}$ est :

$$\mathrm{e}^{t} = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \underset{t\to 0}{o}(t^2)$$

Donner le $DL_2(2)$ $x \longmapsto \mathrm{e}^{x}$.

On pose $x = t+2$

On a donc : $\begin{aligned} f(x) &= f(t+2) \\ &= \mathrm{e}^{t+2} \\ &= \mathrm{e}^{2} \times \mathrm{e}^{t} \end{aligned}$

En notant $f_0(t) = \mathrm{e}^{2}\mathrm{e}^{t}$, on a donc :

$$f_0(t) = \mathrm{e}^{2}\left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \underset{t\to 0}{o}(t^2)\right)$$

Par suite, on a donc : $f(x) = \mathrm{e}^{2}\left(1 + (x-2) + \dfrac{(x-2)}{2!} + \underset{x\to 2}{o}\left((x-2)^2\right)\right)$

□

Application| [3357] | **2**| $\mathrm{DL}_2(-1)$ **de** $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$

Déterminer le $DL_2(-1)$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$.

□

5. Formule de Taylor-Young pour les développements limités

Théorème 3 – Formule de Taylor-Young – ADMIS

Si f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I et a un point intérieur à I f admet un $DL_n(a)$ donné par :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right) \end{aligned}$$

Utilisation de la formule

Cette formule sert assez peu en pratique, du fait du calcul des dérivées d'ordre k pour $0 \leq k \leq n$ de la fonction f dont on cherche le $DL_n(a)$.

Cependant, elle permet d'obtenir le développement limité de quelques fonctions classiques dont le calcul des dérivées successives ne pose pas de problème comme $x \longmapsto \mathrm{e}^x$, $x \longmapsto \cos(x)$ et $x \longmapsto \sin(x)$.

□

Théorème 4 – Développement limité en 0 de la fonction exponentielle

La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et admet ainsi un $DL_n(a)$ en tout $a \in \mathbb{R}$ et à tout ordre $n \in \mathbb{N}$.

$DL_n(0)$ de $x \longmapsto \mathrm{e}^x$

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right) + \underset{x\to 0}{o}(x^n) \end{aligned}$$

□

Proposition 3 – Developpement limité de cosinus et sinus

Les fonctions $x \longmapsto \cos(x)$ et $x \longmapsto \sin(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et admettent ainsi un $DL_n(a)$ en tout $a \in \mathbb{R}$ et à tout ordre $n \in \mathbb{N}$.

$DL_{2n+1}(0)$ de $x \longmapsto \cos(x)$

$$\begin{aligned} \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+1}\right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+1}\right) \end{aligned}$$

$DL_{2n+2}(0)$ de $x \longmapsto \cos(x)$

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+1}\right) \end{aligned}$$

□

Application| [4733] | 3| Utiliser des développements limités usuels

Écrire le $DL_4(0)$ de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$ et celui de a fonction $x \longmapsto \cos(3x)$

□

6. Obtention de développements limités par opérations

Contexte

Dans ce paragraphe et sauf mention contraire, f et g sont deux fonctions admettant $DL_n(0)$ dont on note P et Q leurs parties régulères respectives.
Les résultats qui vont suivre nous permettrons d'obtenir le développement limité d'autres fonctions à partir de développements limités d'un catalogue de fonctions usuelles.

□

Proposition 4 – Combinaison linéaire et produits de développements limités

Combinaison linéaire de $DL_n(0)$

La fonction $\underset{\text{où } (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2}{\boxed{\lambda f + \mu g}}$ admet un $DL_n(0)$ de partie régulière $\lambda P + \mu Q$.

$$(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda P(x) + \mu Q(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

Produit de deux $DL_n(0)$

La fonction $\boxed{f \times g}$ admet un $DL_n(0)$ de partie régulière le polynôme $P \times Q$ tronqué de tous les monômes de degré strictement supérieur à n.

En travaillant avec des développements limités de f et g du même ordre pour ces deux opérations on « maîtrise » l'ordre du $DL_n(0)$ même si l'on peut optimiser les calculs en anticipant les modifications d'ordre par opérations.

□

Application|[4734]| 4| Opérations sur les développements limités

(1). Former les $DL_3\,(0)$ des fonctions $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$ et $x \longmapsto \dfrac{x}{1-x^2}$.

(2). En déduire le $DL_3\,(0)$ des fonctions $x \longmapsto \dfrac{4}{1-x} - \dfrac{3x}{1-x^2}$ et $x \longmapsto \dfrac{x}{(1-x)\,(1-x^2)}$

□

Proposition 5 – Existence du développement limité d'un quotient

Si g est une fonction qui admet un $DL_n\,(0)$ avec $g\,(0) \neq 0$, alors la fonction $\dfrac{1}{g}$ admet un $DL_n\,(0)$.

Exploitation du résultat lorsque $g(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$

On remarquqe que $\dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{1-(1-g(x))}$.

Comme $g(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$, on a $1-g(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et on peut utiliser le résultat rencontré pour $x \longmapsto \dfrac{1}{1-u(x)}$ avec $u(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

□

Application| [4735] | 5| Développement limité d'un quotient

Former le $DL_3(0)$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x} - x}$

$\square$

Proposition 6 – Développement limité d'une composée

Soit I et J deux intervalles tels que 0 est intérieur à I et J et on considère $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $f(I) \subset J$. Si f et g admettent un $DL_n(0)$ de parties régulières Pet Q avec $f(0) = 0$, alors la fonction $g \circ f$ admet un $DL_n(0)$ de partie régulière le polynôme $Q \circ P$ tronqué au degré n.

Illustration

On rappelle que :

$\mathrm{e}^{t} = 1 + t + \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{6} + \underset{t \to 0}{o}(t^3)$

$\sin(t) = t - \dfrac{t^3}{6} + \underset{t \to 0}{o}(t^3)$

Former le $DL_3(0)$ de $x \longmapsto \mathrm{e}^{\sin(x)}$.

On a clairement que $\sin(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$.

Le $DL_3(0)$ de $x \longmapsto \mathrm{e}^{\sin(x)}$ est donc :

$$\mathrm{e}^{\sin(x)} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + \underset{x \to 0}{o}(x^3)$$

On développe cette expression en ne gardant que les termes de degré 3 en utilisant la règle des deux doigts et on ordonne ses calculs...

$$\begin{array}{rcccccccccc}
\mathrm{e}^{x} & = & 1 & + & x & & & - & \dfrac{x^3}{6} & & \\
 & & & & & + & \dfrac{1}{2}x^2 & & & & \\
 & & & & & & & + & \dfrac{1}{6}x^3 & + & \underset{x \to 0}{o}(x^3) \\
 & = & 1 & + & x & + & \dfrac{1}{2}x^2 & & & + & \underset{x \to 0}{o}(x^3)
\end{array}$$

$\square$

Proposition 7 – Intégration d'un développement limité

Soient $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle ouvert contenant 0 et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et si f' admet un $DL_n(0)$ de partie régulière P,

alors f admet un $DL_{n+1}(0)$ dont la partie régulière s'obtient par primitivation de P.

$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(0) + \int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t + \underset{x \to 0}{o}\left(x^{n+1}\right)$$

□

Application| [3364] | 6| Intégrer un $\mathrm{DL}_n(0)$

On sait que : $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \underset{x \to 0}{o}\left(x^3\right)$.
Former alors le $DL_4(0)$ de la fonction $x \longmapsto \ln(1-x)$.

□

7. Développements limités usuels en 0

Théorème 5 – Logarithme népérien | $n \in \mathbb{N}^*$

$DL_n(0)$ de $x \longmapsto \ln(1-x)$

$$\begin{aligned}
\ln(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \\
&\quad - \ldots - \frac{x^n}{n} + \underset{x \to 0}{o}\left(x^n\right) \\
&= \left(-\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}\right) + \underset{x \to 0}{o}\left(x^n\right)
\end{aligned}$$

$DL_n(0)$ de $x \longmapsto \ln(1+x)$

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \\
&\quad + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \underset{x \to 0}{o}\left(x^n\right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}\right) + \underset{x \to 0}{o}\left(x^n\right)
\end{aligned}$$

□

Théorème 6 – Du côté des puissances

Cas général | $\alpha \in \mathbb{R}$ réel <u>FIXÉ</u> | $n \in \mathbb{N}$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

Cas $\alpha = \frac{1}{2}$ et $n=3$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$$

Cas $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $n=3$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$$

□

On en déduit alors ceux de $x \longmapsto \sqrt{1-x}$ et $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ en remplaçant x par $-x$ dans ces expressions.

8. Calculs de limites avec des développements limités

Application | [4736] | **7| Calcul de limites**

Déterminer la limite quand x tend vers 0 de $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{1+2x}-(1+x)}{x^2}$.

□

9. Étude locale d'une fonction

Remarque 2 – Lien dérivabilité et $\mathrm{DL}_n(a)$

La mise en parallèle de la définition de la dérivabilité et de la définition des développements limités permet de dire que :

$$(\ f \text{ est dérivable en } a\ ) \quad \Leftrightarrow \quad (\ f \text{ admet un } DL_1(a)\ )$$

□

Théorème 7 – Lien entre développement limité et tangente

Si f admet un développement limité en x_0 à l'ordre p de la forme :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_p(x - x_0)^p + \underset{x \to x_0}{o}((x - x_0)^p) \quad \text{avec } a_p \neq 0 \text{ et } p \geq 2$$

alors

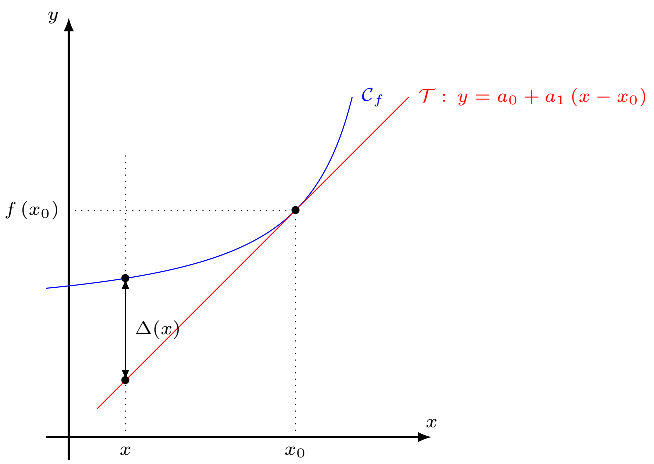
- $\mathcal{C}_f$ **admet** en x_0 une tangente $\mathcal{T}$ d'équation : $y = a_0 + a_1(x - x_0)$
- la position locale de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{T}$ est donnée par le signe de $a_p(x - x_0)^p$.

On retiendra que :

$$f(x) = \underbrace{a_0 + a_1(x - x_0)}_{\text{Équation réduite de la tangente } \mathcal{T} \text{ en } x_0} + \underbrace{a_p(x - x_0)^p}_{\text{Position locale de } \mathcal{C}_f \text{ par rapport à } \mathcal{T}} + \underset{x \to x_0}{o}((x - x_0)^p)$$

□

Éléments de preuve:



$$\begin{aligned}
\Delta(x) &= f(x) - (a_0 + a_1(x - x_0)) \\
&= a_p(x - x_0)^p + \underset{x \to x_0}{o}((x - x_0)^p) \\
&= a_p(x - x_0)^p \underbrace{\left(1 + \frac{1}{a_p} \times \underset{x \to x_0}{o}(x - x_0)\right)}_{\underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 1}
\end{aligned}$$

Donc $\Delta(x)$ et $a_p(x - x_0)^p$ sont de même signe au voisinage de x_0.

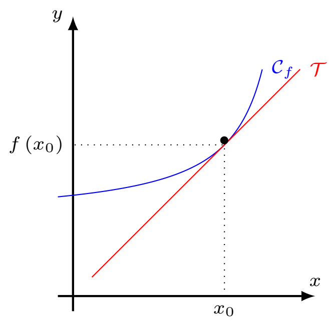
Visualisation | Illustration | Étude de la position d'une courbe par rapport à sa tangente

$\Delta(x)$ et $a_p(x - x_0)^p$ sont de même signe au voisinage de x_0.

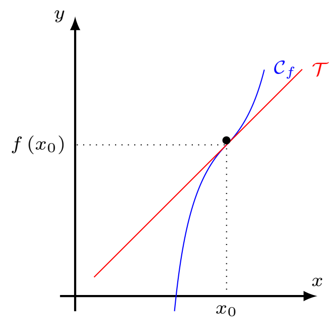
Signe de $x \longmapsto (x - x_0)^p$ | Interprétation

p est pair	p impair
Signe constant	Change de signe en x_0
$\mathcal{C}_f$ est toujours du même côté de $\mathcal{T}$	$\mathcal{C}_f$ traverse $\mathcal{T}$.

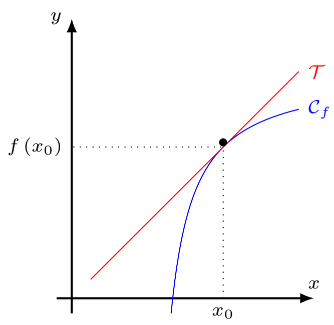
$a_p > 0$ | p pair



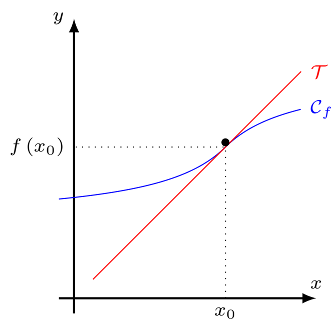
$a_p > 0$ | p impair | Point d'inflexion



$a_p < 0$ | p pair



$a_p < 0$ | p impair | Point d'inflexion

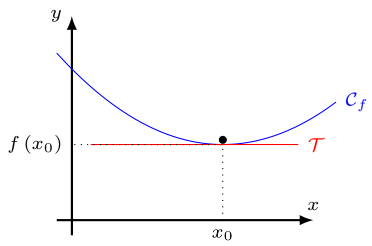


Proposition 8 – Cas particulier

Si f admet un $DL_2(x_0)$ de la forme

$$f(x) = a_0 + a_2 (x - x_0)^2 + \underset{x \to x_0}{o}\left((x - x_0)^2\right)$$

avec $a_2 > 0$,
alors f admet un minimum local en x_0.
En un tel point, $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale d'équation $y = a_0$.



□

Application| [3365] | 8| Position d'une courbe par rapport à sa tangente

Étudier l'existence d'une tangente $\mathcal{T}$ au point d'abscisse 0 et la position relative de cette dernière par rapport à la courbe représentative $\mathcal{C}_h$ de la fonction $h : x \longmapsto \dfrac{4}{1-x} - \dfrac{x}{1-x^2}$.

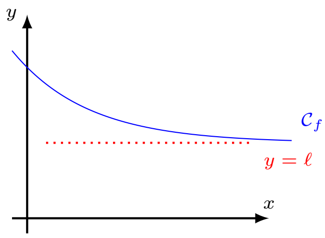
□

10 . Comportement à l'infini d'une fonction

Définition 3 – Limite finie en $+\infty$ ou en $-\infty$

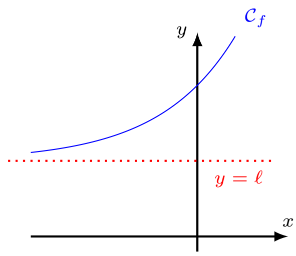
Asysmptote horizontale en $+\infty$

Lorsque $f : [\alpha; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est telle que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$, on dit que $\mathcal{C}_f$ admet la droite déquation $y = \ell$ comme asymptote horizontale en $+\infty$.



Asysmptote horizontale en $-\infty$

Lorsque $f :]-\infty; \alpha] \longrightarrow \mathbb{R}$ est telle que $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$, on dit que $\mathcal{C}_f$ admet la droite déquation $y = \ell$ comme asymptote horizontale en $-\infty$.



Position de la courbe par rapport à une asymptote horizontale

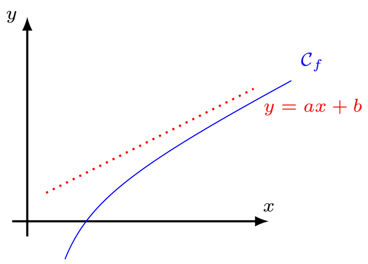
La position de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f par rapport à une asymptote horizontale, est donnée par le signe de la différence $\Delta(x) = f(x) - \ell$, étant entendu que c'est au voisinage de $\pm\infty$ que l'on souhaite préciser la position de l'une par rapport à l'autre.

□

Définition 4 – Asymptote oblique en $+\infty$

On suppose que $f : [\alpha; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$.
On dit que $\mathcal{C}_f$ admet la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = ax + b$ pour asymptote oblique en $+\infty$ lorsque $f(x) - (ax + b) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Cette définition s'adapte pour une asymptote oblique en $-\infty$.



Position de la courbe par rapport à une asymptote oblique

La position de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f par rapport à une asymptote oblique $\mathcal{D}$ d'équation $y = ax+b$ est donnée par le signe de la différence $\Delta(x) = f(x) - (ax + b)$, étant entendu que c'est au voisinage de $+\infty$ que l'on souhaite préciser la position de l'une par rapport à l'autre.

Illustration

La droite d'équation $y = 2x - 2$ est-elle asymptote oblique en $+\infty$ pour $\mathcal{C}_f$ où

$$f : x \longmapsto \frac{2x^2 + 2x + 1}{x + 2}?$$

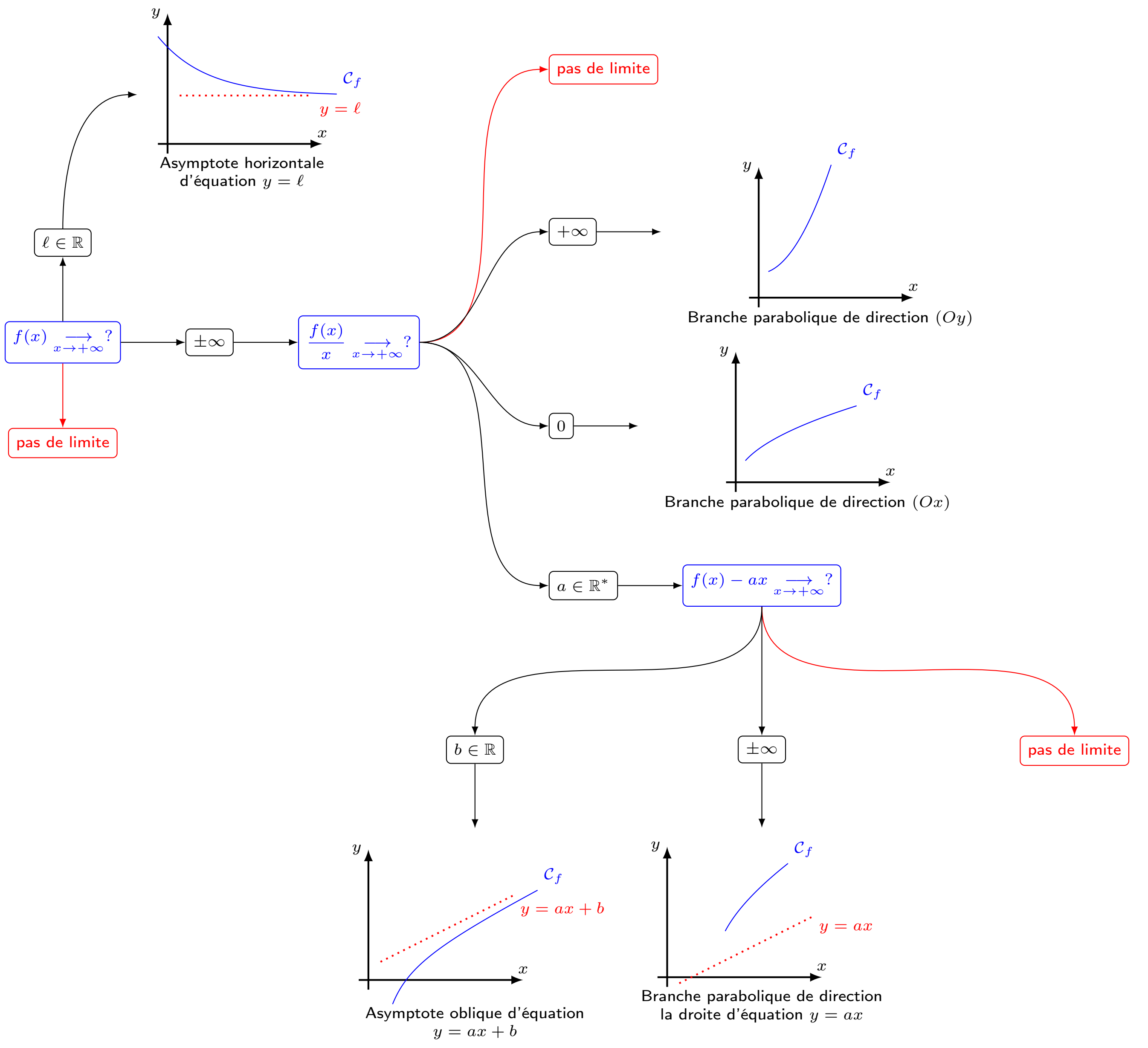
Étudier alors leur position relative.

On a clairement :

$$\begin{aligned}
\forall x > -2,\ f(x) - (2x - 2) &= \frac{2x^2 + 2x + 1}{x + 2} - 2x + 2 \\
&= \frac{2x^2 + 2x + 1 - (2x - 2)(x + 2)}{x + 2} \\
&= \frac{5}{x + 2}
\end{aligned}$$

Comme $\dfrac{5}{x+2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit que $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $y = 2x - 2$ pour asymptote oblique en $+\infty$.
De plus, il est immédiat que : $\quad \forall x > -2, \dfrac{5}{x+2} > 0$
Donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de son asymptote en $+\infty$.

Plan d'obtention de l'équation réduite d'une asymptote oblique



$\square$

11 . Développement limité et recherche d'asymptote oblique

Définition 5 – Notion de développement limité en $+\infty$ | Développement asymptotique

On dit que $f : [\alpha; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ admet un développement limité d'ordre n en $+\infty$ ou encore développement aysmptotique en $+\infty$ lorsqu'il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que au voisinage de $+\infty$ on ait :

$$f(x) = c_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

Cela revient à dire que la fonction $x \longmapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$ admet un $DL_n(0)$.

Développement asymptotique de $x \longmapsto \ln\left(2+\frac{1}{x}\right)$ à l'ordre 3

En remarquant que $\frac{1}{2x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, en utilisant le $DL_3(0)$ de $t \longmapsto \ln(1+t)$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\ln\left(2+\frac{1}{x}\right) &= \ln(2) + \ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)\\
&= \ln(2) + \left(\frac{1}{2x}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2x}\right)^3 + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)\\
&= \ln(2) + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + \frac{1}{24x^3} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)
\end{aligned}$$

□

Théorème 8 – Développement limité en $+\infty$ et asymptote oblique

Si $f : [\alpha; +\infty[$ est telle que la fonction $x \longmapsto \frac{f(x)}{x}$ admet un développement limité en $+\infty$ de la forme

$$\frac{f(x)}{x} = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_k}{x^k} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^k}\right) \quad \text{avec } k \geq 2 \text{ et } a_k \neq 0$$

alors $f(x) - (a_0x + a_1) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Interprétation | Position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à une asymptote oblique

Lorsque c'est le cas, la droite d'équation $y = a_1 + a_0x$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et la position de la courbe par rapport à cette asymptote est donnée par le signe de $\frac{a_k}{x^{k-1}}$.

□

Éléments de preuve:

Application| [4738] **| 9| Asymptote oblique et développement limité**

La courbe représentative de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2-1}$ admet-elle une asymptote oblique en $+\infty$? Si oui, étudier leur position relative.

$\square$

12. Étude de la fonction $x \longmapsto e^{-x^2}$

Théorème 9 – Variations de $x \longmapsto e^{-x^2}$

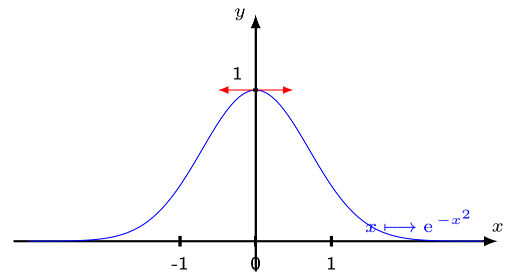
Variations

La fonction $f : x \longmapsto e^{-x^2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et est une fonction paire.

x	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	0	$+$
Variations de f	1 ↘	0

Représentation graphique

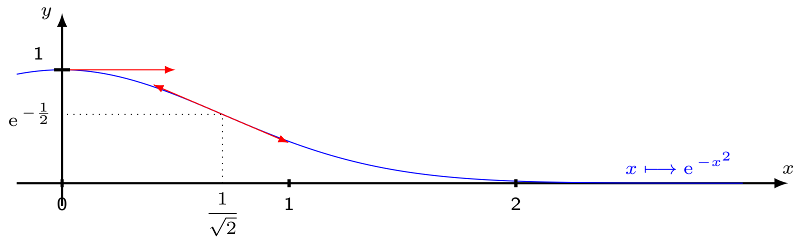
$\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0 et la droite d'équation $y = 0$ comme asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$.



Proposition 9 – Point d'inflexion de la courbe de $x \longmapsto e^{-x^2}$

Les points d'abscisses $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ sont des points d'inflexion pour la courbe représentative de $f : x \longmapsto e^{-x^2}$.

En ces deux points, $\mathcal{C}_f$ traverse sa tangente.



Éléments de preuve: