AN12

Équivalence et prépondérance pour les fonctions

Version du 30-09-2022 à 10:56

Contexte

L'objet de ce chapitre est de présenter la notion d'équivalence ou de prépondérance de fonctions, dans le prolongement d ce qui a été fait pour les suites numériques.
Dans tout ce chapitre, sauf mention contraire :

- I désigne un intervalle non vide et non réduit à un point ;
- f et g désignent deux fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$;
- $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ est un point de I ou une de ses extrémités ;
- On suppose que la fonction g ne s'annule pas sur un voisinage de a sauf éventuellement en a.
  Si $g(a) = 0$, on imposera dans ce cas que $f(a) = 0$.

□

1 . Négligabilité et prépondérance

Définition 1 – Prépondérance ou négligeabilité

f **est négligeable devant** g ou g **est prépondérante devant** f **au voisinage de** a lorsque :

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$$

Notation

$$f = \underset{a}{o}(g)$$

$$f(x) = \underset{x \to a}{o}(g(x)) .$$

Autre définition

f est négligeable devant g au voisinage de a lorsque :

$$\exists \varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \forall x \in I, \quad f(x) = \varepsilon(x) \times g(x) \\ \text{avec } \varepsilon(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$$

□

Proposition 1 – Fonctions de limite nulle

$$\left(f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0 \right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\underset{\text{où } 1 \text{ désigne la fonction constante égale à } 1}{f = \underset{a}{o}(1)} \right)$$

Éléments de preuve: Il suffit de remarquer que l'on doit s'intéresser à la limite du quotient $\dfrac{f(x)}{1}$ en a.

□

Théorème 1 – Croissances comparées - Pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$:

$$(\ln(x))^\beta \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\alpha) \qquad |\ln(x)|^\beta \underset{x\to 0^+}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) \qquad x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^{\beta x}\right) \qquad \mathrm{e}^{\beta x} \underset{x\to-\infty}{=} o\left(\frac{1}{|x|^\alpha}\right)$$

☐

Point méthode 1 – Montrer que f est négligeable devant g

Dans la pratique pour montrer que $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$, on montre que $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.

☐

Application | [3159] | 1 | Établir une prépondérance

Montrer que $x^2\sin(x) \underset{x\to 0}{=} o(x)$.

☐

Application | [3160] | 2 | « Ordonner » des fonctions

Classer les fonctions suivantes par ordre de négligeabilité lorsque x tend vers $+\infty$:

$$f_1 : x \longmapsto x, \quad f_2 : x \longmapsto x^2, \quad f_3 : x \longmapsto x\ln(x),$$

$$f_4 : x \longmapsto \frac{1}{x}, \quad \text{et} \quad f_5 : x \longmapsto x\,(\ln(x))^{\frac{1}{2}}$$

☐

Proposition 2 – Opérations usuelles avec la négligabilité

f, g, h et k sont quatre fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Sous réserve que ces dernières remplissent les conditions permettant d'écrire les relations suivantes, on a :

Transitivité

Si $\begin{cases} f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x)) \\ \text{et} \\ g(x) = \underset{x\to a}{o}(h(x)) \end{cases}$, alors $f(x) = \underset{x\to a}{o}(h(x))$.

Éléments de preuve: On remarque que :

$$\frac{f(x)}{h(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \times \frac{g(x)}{h(x)}$$

et on gardera cette idée pour les exercices...

Multiplication par un réel | Pour $\lambda \in \mathbb{R}$

Si $f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$,
alors $\lambda \times f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$.

Éléments de preuve: Il est clair que :

$$\frac{\lambda \times f(x)}{g(x)} = \lambda \times \frac{f(x)}{g(x)}$$

On retiendra que la constante est « absorbée par la prépondérance.

Addition de deux négligeables

Si $\begin{cases} f(x) = \underset{x\to a}{o}(h(x)) \\ \text{et} \\ g(x) = \underset{x\to a}{o}(h(x)) \end{cases}$ alors $f(x) + g(x) = \underset{x\to a}{o}(h(x))$.

Éléments de preuve: On remarque simplement que

$$\frac{f(x)+g(x)}{h(x)} = \frac{f(x)}{h(x)} + \frac{g(x)}{h(x)}$$

Produit de deux fonctions

Si $\begin{cases} f(x) = \underset{x\to a}{o}(h(x)) \\ \text{et} \\ g(x) = \underset{x\to a}{o}(k(x)) \end{cases}$, alors $f(x) \times g(x) = \underset{x\to a}{o}(h(x) \times k(x))$.

Éléments de preuve: On remarque simplement que :

$$\frac{f(x) \times g(x)}{h(x) \times k(x)} = \frac{f(x)}{h(x)} \times \frac{g(x)}{h(x)}$$

Puissance | Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ réel fixé qui ne dépend pas de la variable !!!

Si $\begin{cases} f > 0 \quad \text{et} \quad g > 0 \\ \text{et} \\ f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x)) \end{cases}$, alors $(f(x))^\alpha = \underset{x\to a}{o}((g(x))^\alpha)$.

Éléments de preuve: On remarquera que

$$\frac{(f(x))^\alpha}{(g(x))^\alpha} = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^\alpha$$

□

2. Équivalence

Définition 2 – Fonctions équivalentes en a

On suppose de plus ici que : $\forall x \in I \setminus \{a\}, \quad f(x) \neq 0.$

f **est équivalente à** g **au voisinage de** a lorsque que :

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 1\,.$$

Notation

$$f \underset{a}{\sim} g$$

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)\,.$$

Caractére symétrique

$$\left(f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)\right) \Leftrightarrow \left(g(x) \underset{x \to a}{\sim} f(x)\right)$$

Lien avec la prépondérance

$$\left(f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)\right) \Leftrightarrow \left(f(x) - g(x) = \underset{x \to a}{o}(g(x))\right)$$

Éléments de preuve: On remarque simplement que : $\dfrac{f(x) - g(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x)}{g(x)} - 1$

Autre définition

f est équivalente à g au voisinage de a lorsque :

$$\exists \varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \forall x \in I, \quad f(x) = g(x) \times (1 + \varepsilon(x)) \\ \text{avec } \varepsilon(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$$

□

Point méthode 2 – Montrer que f est équivalente à g

Dans la pratique pour montrer que $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$, on montre que $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 1$.

□

Application| [3161] | 3| Fonctions équivalentes

Montrer que $\ln(1 + x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \ln(x)$.

□

Théorème 2 – Transfert du signe par équivalence

Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, alors f et g sont de même signe au voisinage de a.

$\square$

Proposition 3 – Opérations avec les équivalents

f, g, h et k sont quatre fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Sous réserve que ces dernières remplissent les conditions permettant d'écrire les relations suivantes, on a :

Transitivité

Si $\begin{cases} f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \\ \text{et} \\ g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x) \end{cases}$, alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$.

Éléments de preuve:
On remarque que $\dfrac{f(x)}{h(x)} = \dfrac{f(x)}{g(x)} \times \dfrac{g(x)}{h(x)}$.

Multiplication par un réel NON NUL | Pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$

Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, alors $\lambda \times f(x) \underset{x\to a}{\sim} \lambda \times g(x)$.

Éléments de preuve:
On remarque que $\dfrac{\lambda \times f(x)}{\lambda \times g(x)} = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Produit de deux fonctions

Si $\begin{cases} f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x) \\ \text{et} \\ g(x) \underset{x\to a}{\sim} k(x) \end{cases}$, alors $f(x) \times g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x) \times k(x)$.

Éléments de preuve:
On remarque que $\dfrac{f(x) \times g(x)}{h(x) \times k(x)} = \dfrac{f(x)}{h(x)} \times \dfrac{g(x)}{k(x)}$.

Passage à l'inverse

Si $\begin{cases} f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \\ \text{et} \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$ alors $\dfrac{1}{f(x)} \underset{x\to a}{\sim} \dfrac{1}{g(x)}$.

Éléments de preuve:
On remarque que $\dfrac{\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{g(x)}} = \dfrac{g(x)}{f(x)}$

Puissance | Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ réel fixé qui ne dépend pas de la variable!!!

Si $\begin{cases} f > 0 \quad \text{et} \quad g > 0 \\ \text{et} \\ f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \end{cases}$, alors $(f(x))^\alpha \underset{x\to a}{\sim} (g(x))^\alpha$

Éléments de preuve:
On remarque que $\dfrac{(f(x))^\alpha}{(g(x))^\alpha} = \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)^\alpha$.

$\square$

3. Catalogue d'équivalents usuels et utilisation

Théorème 3 – Équivalents usuels

Soit $u : I \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction réelle telle que $u(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$. Alors :

	$e^{u(x)} - 1 \underset{a}{\sim} u(x)$	$\sin(u(x)) \underset{a}{\sim} u(x)$
$\ln(1 + u(x)) \underset{a}{\sim} u(x)$	$\tan(u(x)) \underset{a}{\sim} u(x)$	$1 - \cos(u(x)) \underset{a}{\sim} \dfrac{u^2(x)}{2}$
$\arctan(u(x)) \underset{a}{\sim} u(x)$	$(1 + u(x))^{\alpha} - 1 \underset{a}{\sim} \alpha \times u(x)$	α est un réel fixé ! ! !

□

Application| [3163] | 4| Recherche d'un équivalent

À l'aide des opérations sur les équivalents de fonctions, établir que :

$$\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^{x} - 1 \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(x)}$$

□

4. Utilisation d'équivalents pour le calcul de limites

Proposition 4 – Calcul de limites à l'aide d'équivalents

Si $\left\{\begin{array}{ccc} f(x) & \underset{x\to a}{\sim} & g(x) \\ & \text{et} & \\ g(x) & \underset{x\to a}{\longrightarrow} & \ell \in \overline{\mathbb{R}} \end{array}\right.$, alors $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.

Éléments de preuve:
On utilisera le fait que $f(x) = g(x)\,(1+\varepsilon(x))$ puisque $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.

Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$ avec $\ell \neq 0$, alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} \ell$.

Éléments de preuve:
Il est clair que $\dfrac{f(x)}{\ell} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \dfrac{\ell}{\ell} = 1$.

Ce résultat est faux si $\ell = 0$.

□

Application| [0760] | 5| Limites

Étudier la limite éventuelle en $+\infty$ de la fonction f :

$$f(x) = \left[\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right]^{x\ln(x)}$$

□