AN11

Fonctions polynomiales

Version du 04-10-2022 à 19:49

Contexte

Dans tout ce qui suit, sauf mention contraire, m, n, p et q désigneront des éléments de $\mathbb{N}$.

1. Vocabulaire et résultats généraux

Définition 1 – Fonctions polynomiales

On appelle **fonction polynomiale** toute fonction P définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ avec $a_n \neq 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \qquad = $$

On dit alors que P est une fonction polynomiale de **degré** n ou polynôme de degré n et que a_n est son **coefficient dominant**. Lorsque $a_n = 1$, on parle de polynôme **unitaire**.

Le coefficient $a_0 = P(0)$ est appelé **terme constant** et le monôme $a_n x^n$ est appelé **monôme de plus haut degré** de P.

De manière générale, les $n+1$ réels a_0, ..., a_n sont appelés les **coefficients** du polynôme P.

Définition 2

Ensemble $\mathbb{R}[x]$

L'ensemble des fonctions polynomiales définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathbb{R}[x]$.

Ensemble $\mathbb{R}_n[x]$

L'ensemble des fonctions polynomiales définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur à $n \in \mathbb{N}$ est noté $\mathbb{R}_n[x]$.

Théorème 1 – Régularité d'une fonction polynomiale

Toute fonction polynomiale est de classe .

Théorème 2 – Unicité des coefficients

Deux polynômes P et Q sont égaux si, et seulement si, .

Définition 3 – Somme et produit de polynômes

Soit $(P,Q)\in\mathbb{R}[x]\times\mathbb{R}[x]$ où $P(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$ et $Q(x)=\sum_{k=0}^{m}b_kx^k$.

Combinaison linéaire de polynômes

$$(\lambda P+Q)(x)=\sum_{k=0}^{\max(n,m)}c_kx^k$$

où $c_k \quad =$

en convenant que :

$$\begin{cases} a_k=0 & \text{si} \quad k>n \\ b_k=0 & \text{si} \quad k>m \end{cases}$$

Produit de polynômes

$$(P\times Q)(x)=\sum_{k=0}^{m+n}c_kx^k$$

où $c_k \quad =$

$=$

en convenant que :

$$\begin{cases} a_k=0 & \text{si} \quad k>n \\ b_k=0 & \text{si} \quad k>m \end{cases}$$

□

Théorème 3 – Structure vectorielle de $\mathbb{R}[x]$ et $\mathbb{R}_k[x]$

$\mathbb{R}[x]$ et $\mathbb{R}_k[x]$ où $k\in\mathbb{N}$ sont des $\mathbb{R}-$espaces vectoriels.

□

Théorème 4 – Degré d'une somme et d'un produit

Soit $(P,Q)\in\mathbb{R}[x]\times\mathbb{R}[x]$.

$\deg(P+Q)\leq$

avec égalité si

$\deg(P\times Q) \quad =$

On convient que le degré du polynôme nul est $-\infty$.

□

Application| [3328] | 1| Degré d'une somme

Dans chacun des cas suivants, quel est le degré du polynôme $P+Q$?

(1). $P(x)=2x^3-x^2+x-1$ et $Q(x)=-2x^3+x^2-1$;

(2). $P(x)=-3x^4+x^3+2$ et $Q(x)=-3x^4-x^3+x^2+1$;

(3). $P=x^4-x^3+x+1$ et $Q(x)=2x^3-5x+1$.

□

Application| [3329] | 2| Coefficient dominant

Quel est le coefficient du terme de plus haut degré du polynôme $P \times Q$ où :
$$P(x) = -3x^2 + 6x - 1 \text{ et } Q(x) = 5x^5 - 2x^3 + x - 2\,?$$
□

Application| [3330] | 3| Degré d'un produit

Soient $P(x) = x^2 + 1$ et $Q(x) = x^3 + x$. Quel est le degré du polynôme $(P + Q)^2$.

□

2. Comportement en $\pm\infty$

Contexte

Dans ce paragraphe P et Q désignent deux polynômes dont l'écriture est respectivement :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \quad \text{où } (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ avec } a_n \neq 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = b_p x^p + \ldots + b_1 x + b_0 \quad \text{où } (b_0, \ldots, b_p) \in \mathbb{R}^{p+1} \text{ avec } b_p \neq 0$$

□

Théorème 5 – Limite en $\pm\infty$ d'une fonction polynomiale

Version « calcul de limite »

La limite en $\pm\infty$ de $P(x)$ est donnée par celle de $a_n x^n$, son monôme de plus haut degré, et ces deux limites sont les mêmes.

Version « équivalent »

$P(x)$ est équivalent à $a_n x^n$ en $\pm\infty$

$$P(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} a_n x^n \text{ et } P(x) \underset{x \to -\infty}{\sim} a_n x^n.$$

Deux rédactions possibles pour déterminer la limite d'un polynôme en $\pm\infty$

Version « calcul de limite »

« Par théorème, la limite de $P(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ est celle de $a_n x^n$ son monôme de plus haut degré. Comme $a_n x^n \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ldots$, on a donc $P(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ldots$ ».

Version « équivalent »

« Puisque $P(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} a_n x^n$ et que $a_n x^n \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \star$, on a $P(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \star$. »

□

Éléments de preuve: On factorise par le monôme de plus haut degré.

Application | [2539] | 4| Limites en $\pm\infty$ d'un polynôme

Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions f suivantes :

(1). $: x \longmapsto -x^3 + x^2 - 2x + 1$;

(2). $f : x \longmapsto 4x^3 - 5x^2 + 3x - 1$;

(3). $f : x \longmapsto -3x^2 + 4x + 1$;

$\square$

Théorème 6 – Limite en $\pm\infty$ d'un quotient de polynômes

Version « calcul de limite »

La limite en $\pm\infty$ de $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ est donnée par celle de $\dfrac{a_n x^n}{b_p x^p}$, le quotient des monômes de plus haut degré, et ces deux limites sont les mêmes.

Version « équivalent »

Le quotient $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ est équivalent à $\dfrac{a_n x^n}{b_p x^p}$ en $\pm\infty$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{a_n x^n}{b_p x^p} \text{ et } \frac{P(x)}{Q(x)} \underset{x \to -\infty}{\sim} \frac{a_n x^n}{b_p x^p}.$$

Deux rédactions possibles pour déterminer la limite en $\pm\infty$ d'un quotient de polynômes

Version « calcul de limite »

« Par théorème, la limite de $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ lorsque x tend vers $+\infty$ est celle de $\dfrac{a_n x^n}{b_p x^p}$ le quotient des monômes de plus haut degré. Comme $\dfrac{a_n x^n}{b_p x^p} \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} \dots$, on a donc $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \dots$ ».

Version « équivalent »

« Puisque $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{a_n x^n}{b_p x^p}$ et que $\dfrac{a_n x^n}{b_p x^p} = \dots \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \star$, on a $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \star$. »

$\square$

Éléments de preuve: On factorise numérateur et dénominateur par leur monôme de plus haut degré.

Application | [2541] | 5| Fonction rationnelle en $\pm\infty$

Déterminer les limites en ∞ et en $-\infty$ des fonctions f suivantes :

(1). $f : x \longmapsto \dfrac{x^2 - 3x + 1}{3x^2 + 2x - 1}$; | **(2).** $f : x \longmapsto \dfrac{3x^3 + x - 1}{4x^2 - 6x + 1}$; | **(3).** $f : x \longmapsto \dfrac{x^2 - x - 1}{4x^3 - 3x + 1}$;

$\square$

3. Racine(s) réelle(s) d'un polynôme

Définition 4 – Racine d'un polynôme

On dit qu'un réel x_0 est une racine du polynôme P lorsque .
En d'autres termes, les racines d'un polynôme sont les solutions de l'équation .

☐

Exemple 1

? -1 est-il racine des polynômes $P : x \longmapsto 3x^2 - 2x - 1$ et $Q : x \longmapsto x^3 - 3x^2 + x - 1$?

-1 n'est pas racine de P puisque : $P(-1) =$
$=$
$=$

mais l'est de Q puisque : $Q(-1) =$
$=$
$=$

☐

Théorème 7 – Existence de racines rélles

Si P est un polynôme de degré , alors P .

☐

Éléments de preuve:

Théorème 8 – Résolution d'un équation de degré 2

On considère l'équation d'inconnue le réel x : $(\star) : ax^2 + bx + c = 0$ où $a \neq 0$.

On appelle discriminant de l'équation $(\star)$ le nombre $b^2 - 4 \times a \times c = \Delta$.

Si $\Delta < 0$, alors l'équation $(\star)$ ne possède pas de solutions réelle.

Si $\Delta \geq 0$, alors l'équation $(\star)$ possède deux solutions réelles $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Dans le cas où $\Delta = 0$, on a clairement $x_1 = x_2$, et on dit alors que x_1 est une racine double et on peut même retenir dans ce cas que $x_1 = -\dfrac{b}{2a}$.

Extension de la terminologie

Pour $P : x \longmapsto ax^2 + bx + c$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on appelle discriminant de P le réel défini par $\Delta = b^2 - 4ac$.

La résolution de l'équation $P(x) = 0$ se ramène donc au cas précédent.

☐

Éléments de preuve:

L'hypothèse $a \neq 0$ permet d'écrire que : $\forall x \in \mathbb{R},\ ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$.

Selon le signe de $\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ et donc de Δ, on peut ou non factoriser l'expression précénte à l'aide de l'identité remarquable $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$, ce qui conduit à une équation produit dont les solutions seront de la forme énoncée.

Application| [2525] **| 6| Équations de degré 2**

Les fonctions polynômes suivantes admettent-elles des racines réelles ? Si oui les déterminer.

(1). $f : x \longmapsto x^2 - 6x + 4$;

(2). $f : x \longmapsto -2x^2 + 7x - 2$;

(3). $f : x \longmapsto 2x^2 - 4x + 2$;

(4). $f : x \longmapsto x^2 + x + 1$;

□

Remarque 1 – Autres terminologies

Lorsque l'on résout une équation de la forme $f(x) = 0$ où f est une fonction numérique, on dit aussi que l'on recherche les zéros de la fonction f.

□

4. Polynômes irréductibles et factorisation de polynômes

Définition 5 – Polynômes irréductibles

Un polynôme $P \in \mathbb{R}[x]$ est dit **irréductible dans** $\mathbb{R}[x]$ lorsque :

ses seuls diviseurs sont les polynômes ou de la forme avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

☐

Théorème 9 – Irréductibilité des polynômes de degré 1 ou ≥ 2

Si $P \in \mathbb{R}[x]$ est de degré 1,
alors P est dans $\mathbb{R}[x]$.

Si $P \in \mathbb{R}[x]$ avec $\deg(P) \geq 2$ admet une racine dans $\mathbb{R}$,
alors P dans $\mathbb{R}[x]$.

☐

Exemple 2 – Absence de racine et irréductibilité

On peut montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 + x^2 + x^4 = \underbrace{(1 + x + x^2)}_{\substack{\text{ne possède aucune racine} \\ \text{réelle car de discriminant } < 0}} \times \underbrace{(x^2 - x + 1)}_{\substack{\text{ne possède aucune racine} \\ \text{réelle car de discriminant } < 0}}$

Ainsi, $1 + x^2 + x^4$ ne possède aucune racine réelle et n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[x]$.

☐

Théorème 10 – Théorème de d'Alembert-Gauss - ADMIS

On désigne par $\mathbb{C}[z]$ l'ensemble des fonctions polynômes définies sur $\mathbb{C}$ et à coefficients dans $\mathbb{C}$.

Tout polynôme de $\mathbb{C}[z]$ de degré supérieur ou égal à 1, admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

☐

Théorème 11 – Décomposition sous forme de facteurs irréductibles | ADMIS

Tout polynôme de $\mathbb{R}[x]$ de degré supérieur ou égal à 1, se décompose de manière unique à l'ordre près des facteurs sous la forme ci-contre :

$$\underbrace{\lambda}_{\in\mathbb{R}^*} \times \left(\begin{array}{c} \text{Produit de polynômes de } \mathbb{R}[x] \\ \text{unitaires et irréductibles de } \mathbb{R}[x] \end{array} \right)$$

☐

Théorème 12 – Caractérisation des polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[x]$ | ADMIS

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[x]$ sont tous les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 de discriminant strictement négatif.

Tout polynôme de $\mathbb{R}[x]$ peut s'écrire sous la forme :

$$\underbrace{\lambda}_{\in\mathbb{K}^*} \times \left(\begin{array}{c} \text{Produit de} \\ \text{polynômes de } \mathbb{R}[x] \\ \text{unitaires et de degré 1} \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c} \text{Produit de} \\ \text{polynômes de } \mathbb{R}[x] \\ \text{unitaires} \\ \text{et de degré 2} \\ \text{de discriminant } <0 \end{array} \right)$$

☐

5. Factoriser un polynôme

5.1. | Division euclidienne de polynômes

Théorème 13 – Division euclidienne | ADMIS

Soient $(A, B) \in \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x]$ avec $B \neq \tilde{0}$.
Il existe un $(Q, R) \in \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x]$ tel que et .
Les polynômes Q et R sont appelés respectivement **quotient** et **reste** de la **division euclidienne** de A par B.

$\square$

Exemple 3

Effectuer la division euclidienne de $x^5 + 2x^2 - x + 2$ par $x^2 + 1$. Qu'en conclure ?

$\square$

5.2. | Factorisation par identification

Théorème 14 – Racine et factorisation – ADMIS

Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\boxed{(P(x_0) = 0) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{l} \text{Il existe un polynôme } Q \text{ tel que} \\ \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \end{array} \right)}$$

Lorsque c'est le cas, on a nécessairement que $\deg(Q) =$, et P et Q ont le .

$\square$

Point méthode 1 – Factoriser par $x - x_0$

Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ de degré n et on suppose que $x_0 \in \mathbb{R}$ une racine réelle de P.

On sait que l'on peut écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \underbrace{(x - x_0) \times \left(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0\right)}_{(x-x_0)\times Q(x)}$$

On développe ensuite $(x - x_0) \times Q(x)$, et on identifie alors les coefficients de $(x - x_0) \times Q(x)$ aux coefficients de P.

On obtient alors un système que l'on résout pour déterminer les valeurs des coefficients $b_0, \ldots, b_{n-1}$.

Lorsque la résolution du système n'aboutit pas, c'est soit parce que x_0 n'est pas racine, soit parce qu'il y a un erreur dans nos calculs...

□

Application | [1910] | **7** | **Factorisation**

On considère le polynôme $P : \longmapsto 2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$.

(1). Calculer $P(2)$.

(2). Déterminer trois réels a, b et c tels que : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = (x-2)\left(ax^2 + bx + c\right)$

(3). Terminer la factorisation de P.

□

6. Ordre de multiplicité d'une racine et applications

Définition 6 – Multiplicité d'une racine

Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ et on suppose que $x_0 \in \mathbb{R}$ une racine réelle de P.
On dit que x_0 est une racine de multiplicité k lorsqu'il existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que :

$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) =$

Lorsque c'est le cas, on a : $\deg(Q) =$.

On dit aussi que x_0 est une racine d'ordre de multiplicité k.

Cette factorisation s'obtient avec la même démarche que pour la factorisation par $x - x_0$.

□

Théorème 15 – Ordre de multiplicité et dérivation

Si $P \in \mathbb{R}[x]$ est tel que $x_0 \in \mathbb{R}$ est une racine réelle de P d'ordre de multiplicité $k \geq 2$,
alors .

□

Éléments de preuve:

Proposition 1 – Ordre de multiplicité et dérivation

Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ non nul et $k \in \mathbb{N}$ avec $k \leq \deg(P)$.

$$\left(\begin{array}{c} x_0 \text{ est racine de } P \\ \text{d'ordre de multiplicité } k \end{array}\right) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} x_0 & \text{est} & \text{racine de } P \\ x_0 & \text{est} & \text{racine de } P' \\ & \vdots & \\ x_0 & \text{est} & \text{racine de } P^{(k-1)} \\ x_0 & & \text{racine de } P^{(k)} \end{array}\right.$$

□

Application|[3342]**| 8| Application à la factorisation**

1 est racine du polynôme $P(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$.
Quel est son ordre de multiplicité ? En déduire une factorisation de P.

□

Point méthode 2 – Factoriser un polynôme

Pour factoriser un polynôme $P \in \mathbb{R}[x]$:

- on essaiera d'identifier ses racines dans $\mathbb{R}$;
- pour chacune d'entre elles, on déterminera son ordre de multiplicité...
- on sait que dans ce cas, P peut s'écrire sous la forme : $P(x) = \underbrace{Q(x)}_{\in\mathbb{R}[x]} \times (x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2}\dots(x-\alpha_p)^{m_p}$

  et il s'agira de déterminer Q...
- on poursuivra la factorisation de P en cherchant une factorisation de Q...et ainsi de suite jusqu'à obtenir un produit de facteur unitaires et irréductibles dans $\mathbb{R}[x]$.

□

7. Polynôme scindé sur $\mathbb{R}$

Définition 7 – Polynôme scindé

Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ un polynôme non nul.
On dira que P **est scindé sur** $\mathbb{R}$ si on peut écrire P sous la forme :

$$(\star_1) \quad : \quad \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) =$$

où $\lambda \in \mathbb{R}^*$ | $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ éléments de $\mathbb{R}$ distincts deux à deux | $(m_1, \dots, m_p) \in (\mathbb{N}^*)^p$

Cela signifie en particulier que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} m_k =$.

Lorsque c'est le cas, on peut aussi écrire P sous la forme :

$$(\star_2) \quad : \quad \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) =$$

où $(\beta_1, \dots, \beta_d) \in \mathbb{R}^d$ avec $d = \deg(P)$

Lire une écriture scindée

Relation $(\star_1)$	Relation $(\star_2)$
On factorise P en tenant compte de l'ordre de multiplicité des racines.	On factorise P sans tenir compte de l'ordre de multiplicité des racines.
On y voit que P possède p racines distinctes deux à deux qui sont $\alpha_1, \dots, \alpha_p$.	On y voit que P admet $d = \deg(P)$ racines, distinctes ou non.

□

8. Critère de changement de signe et de variations

Théorème 16 – Multiplicité et changement de signe

Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ et on suppose que $x_0 \in \mathbb{R}$ est une racine de P.

$$\left(P \text{ change de signe en } x_0 \right) \Leftrightarrow \left(\text{La multiplicité de } x_0 \right)$$

□

Éléments de preuve:

Théorème 17 – Multiplicité et changement de variation

Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$\left(\begin{array}{c}P \text{ admet un} \\ \text{extremum} \\ \text{local en } x_0\end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\qquad\qquad\qquad\right)$$

□

Éléments de preuve:

Proposition 2 – Un cas particulier

Si P est un polynôme tel que et , alors .

□

Application| [4731] | 9| Application à la factorisation

1 est racine du polynôme $P(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$.

(1). P change-t-il de signe en 1 ?

(2). P présente-t-il un extremum local en 1 ?

□