AN10

Intégration d'une fonction continue

Version du 09-02-2023 à 12:47

1. Intégrale d'une fonction continue sur $[a\,;b]$

Théorème 1 – Construction de l'intégrale d'une fonction continue

Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction **continue** sur $[a;b]$ avec $a < b$.

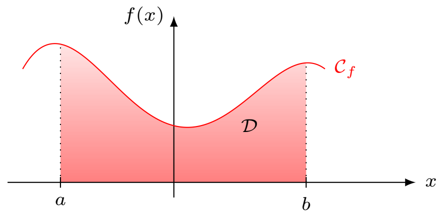
On admet que l'on peut définir un nombre, noté $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, selon le processus de construction suivant et qui s'interprête en terme de mesure d'aire comme suit :

Pour f positive sur $[a;b]$

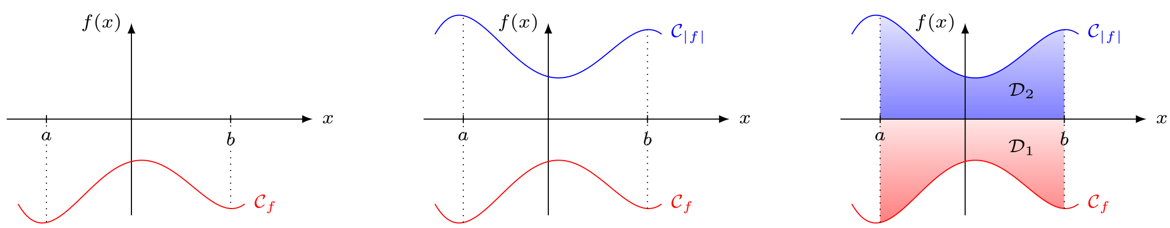
On considère le sous-ensemble $\mathcal{D}$ du plan défini par

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ a \le x \le b \text{ et } 0 \le y \le f(x)\right\}$$

Le nombre $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est alors égal à l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine $\mathcal{D}$.



Pour f négative sur $[a;b]$



La courbe $\mathcal{C}_{|f|}$ de la fonction $|f| : x \longmapsto |f(x)|$ se déduit de $\mathcal{C}_f$ par une symétrie par rapport à l'axe des abscisses. Les deux domaines $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ainsi définis à l'aide de $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_{|f|}$ et des deux droites d'équations $x = a$ et $x = b$ ont la même aire.

D'après le premier point, l'aire du domaine $\mathcal{D}_2$ est $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ et on définira le nombre $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ par :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Pour f qui n'est pas de signe constant sur $[a;b]$

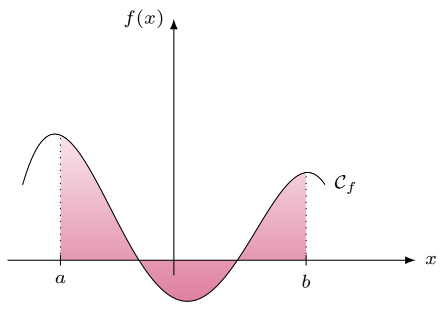
On définit les deux fonctions f^+ et f^- par :

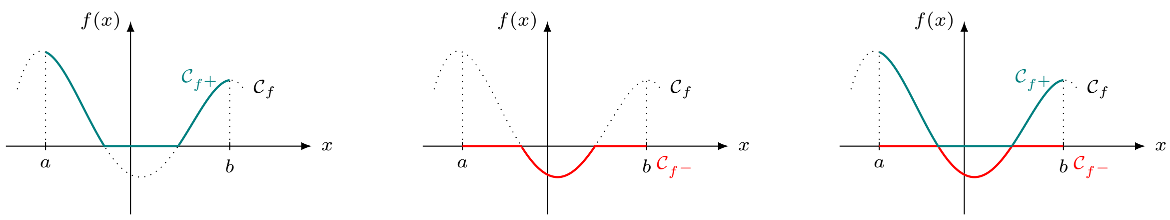
$$f^+(c) = \max\{f(x), 0\} \text{ et } f^-(x) = \min\{0, f(x)\}$$

de sorte que : $\forall x \in [a;b]$, $f(x) = \underbrace{f^+(x)}_{\geq 0} + \underbrace{f^-(x)}_{\leq 0}$

On définit alors le nombre $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ par :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \left|f^+(t)\right|\,\mathrm{d}t - \int_a^b \left|f^-(t)\right|\,\mathrm{d}t$$





Sens de la notation $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

La notation $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ utilisé dans cette présentation n'a de sens implictement que si $a < b$ puisqu'il le faut pour que l'intervalle $[a;b]$ ait du sens.

On va donc proposer maintenant de « prolonger » ce concept « d'intégrale de a à b » qui ne dépende finalement pas de l'ordre d'écriture des deux bornes a et b.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point avec $(a,b) \in I^2$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ **continue** sur I.

Si $a < b$	Si $a = b$	Si $a > b$
$\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$	$\displaystyle\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$	$\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$

□

2. Positivité et croissance de l'intégrale

Contexte

Dans tout ce paragraphe, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ **continue** sur I.

Dans les énoncés qui suivent, a et b désigneront deux éléments de I tels que $a < b$.

□

Théorème 2 – Positivité de l'intégrale

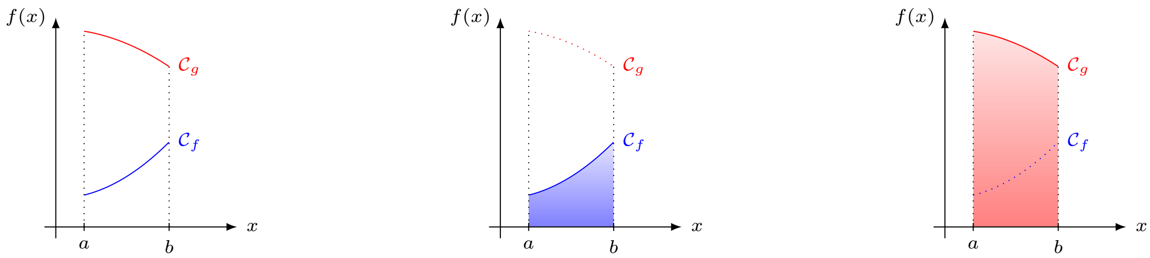
Si $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et positive sur $[a;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$.

□

Théorème 3 – Croissance de l'intégrale

Si $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sont continues sur $[a;b]$, telles que : $\forall t \in [a;b]\,,\quad f(t) \leq g(t)$

alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$

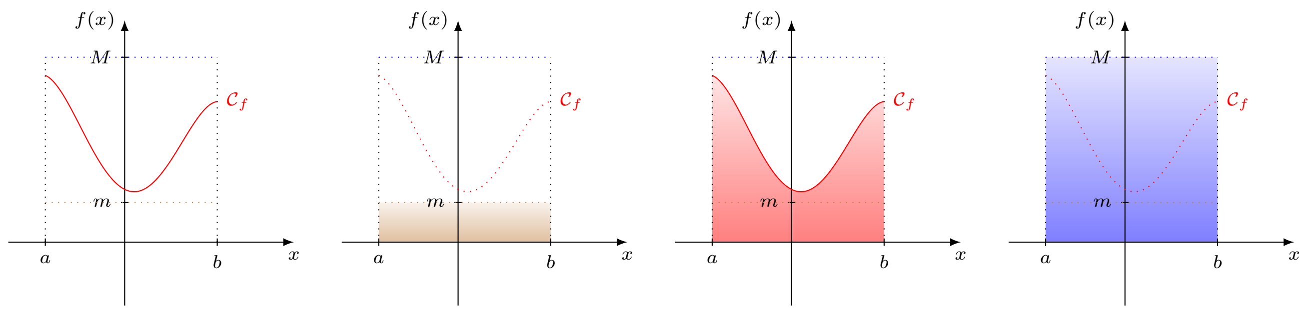


□

Théorème 4 – Encadrement d'une intégrale - Inégalité de la moyenne

Si $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a;b]$ et $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ sont tels que : $\forall x \in [a;b] \quad m \leq f(x) \leq M$

alors $\displaystyle m\,(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq M\,(b-a)$



□

Théorème 5 – Inégalité triangulaire

Si $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a;b]$, **alors** $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$

□

Théorème 6 – Intégrale nulle et fonction nulle

Si $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ **continue** et **positive** sur $[a;b]$ telle que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$,

alors f est la fonction nulle sur $[a;b]$.

□

3 . Opérations sur les intégrales

Contexte

Dans tout ce paragraphe, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ **continue** sur I.

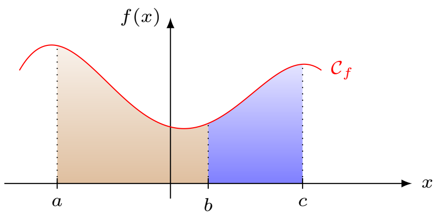
□

Théorème 7 – Relation de Chasles

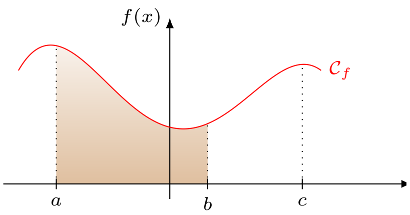
Si a, b et c sont trois éléments de I,

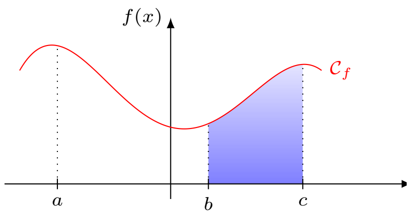
alors $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t$

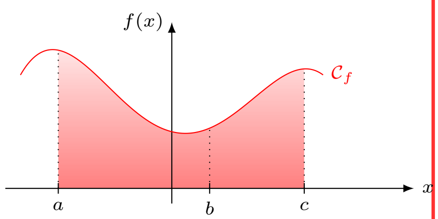
L'ordre des trois réels a, b et c n'a pas d'importance



□







Théorème 8 – Linéarité de l'intégrale

Si $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues sur $[a;b]$, et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

alors $\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$

□

4. Intégrales et primitives

Contexte

Dans tout ce paragraphe, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

Définition 1 – Primitive d'une fonction

On appelle primitive de f sur I, toute fonction F définie sur I qui vérifie :

- F est dérivable en tout point de I ;
- Pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

On dira dans ce cas que F est une primitive de f sur I

Théorème 9 – Forme des primitives

Si F est une primitive de f sur I,
alors toute fonction G donnée par :

$$G : \left| \begin{array}{ccl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & G(x) = F(x) + k \end{array} \right.$$

où k est un réel quelconque, est aussi une primitive de f sur l'intervalle I.

Dès lors qu'une fonction f admet une primitive sur I, elle en possède une infinité.

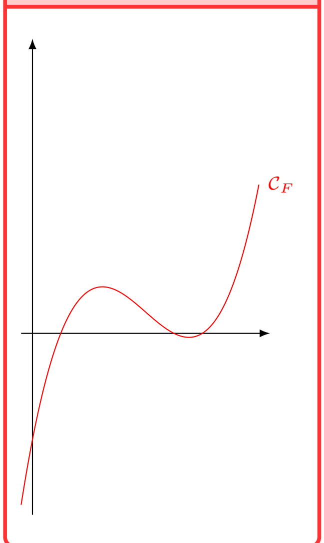
Si F et G sont deux primitives de la fonction f sur l'intervalle I,
alors il existe un réel k tel que :

$$\forall x \in I,\ G(x) = F(x) + k$$

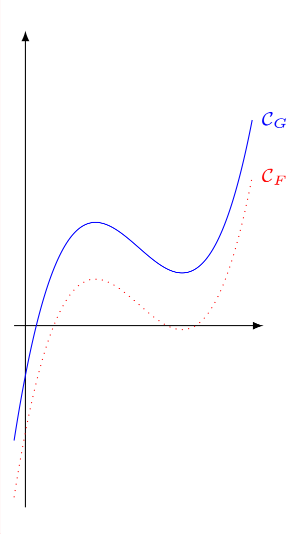
Deux primitives d'une même fonction sont « égales à une constante additive près ».

Illustration graphique

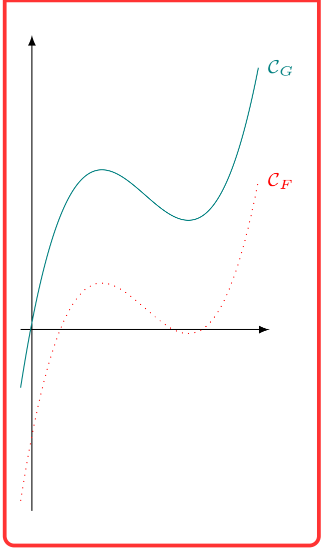
Une primitive de f



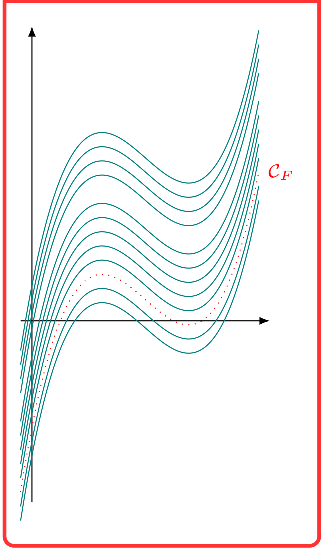
Une autre ...



Encore une autre...



« Toutes ! »



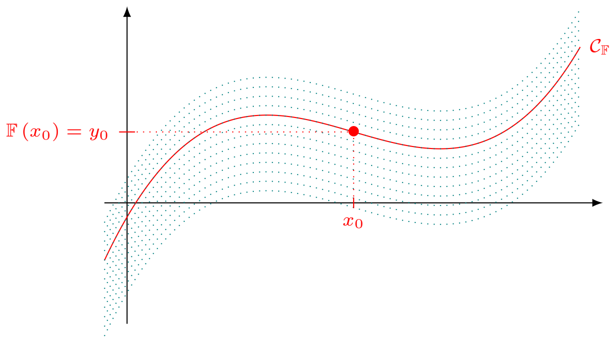
Théorème 10 – Existence de primitives

Si la fonction f est continue sur l'intervalle I, **alors** f admet une primitive sur I.

« Unicité » d'une primitive

Si f est une fonction continue sur I avec $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$,
alors il **existe** une unique primitive $\mathbb{F}$ de f sur I qui vérifie $\mathbb{F}(x_0) = y_0$.

Parmi toutes les primitives de f, il n'en existe qu'une seule $\mathbb{F}$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}_{\mathbb{F}}$ passe par le point (x_0, y_0).



Théorème fondamental de l'analyse

Si la fonction f est continue sur l'intervalle I,
alors pour tout $a \in I$, la fonction $F : x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f sur I qui s'annule en a.

Par ailleurs F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et on a : $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$.

Un cas particulier à garder en tête

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $a \in I$, **alors** pour tout $x \in I$, $f(x) = \displaystyle\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t + f(a)$.

On peut aussi écrire ce résultat ainsi : $\displaystyle\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$

pour tout $(a, b) \in I^2$

$\square$

Théorème 11 – Lien avec les primitives

Si $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $[a;b]$ dont on note F une primitive de f sur $[a;b]$,
alors le réel $F(b) - F(a)$ est indépendant du choix de la primitive de f sur $[a;b]$ et vaut :

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Notation propre au calcul d'intégrale

Lorsque F désigne une primitive sur I de f :
$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)dt &= [F(t)]_a^b \\ &= F(b) - F(a)\end{aligned}$$

$\square$

Application| [2061] | 1| Intégration

Calculer les intégrales suivantes :

(1). $I_1 = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t\,;$

(2). $I_2 = \displaystyle\int_0^2 \frac{\mathrm{e}^{\,t}}{1+\mathrm{e}^{\,t}}\,\mathrm{d}t\,;$

(3). $I_3 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(t)\cos^2(t)\,\mathrm{d}t\,;$

(4). $I_4 = \displaystyle\int_{-1}^1 \left|x^2 - x\right|\,\mathrm{d}x\,;$

(5). $I_5 = \displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t\ln^3(t)}\,\mathrm{d}t\,;$

(6). $I_6 = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1+t^3}}\,\mathrm{d}t\,;$

(7). $I_7 = \displaystyle\int_0^1 t\mathrm{e}^{\,t^2}\,\mathrm{d}t\,;$

(8). $I_8 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t)\,\mathrm{d}t$

□

Application| [2064] | 2| Intégration

On considère la fonction : $F : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{-1}^{x} \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$.

(1). Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer la dérivée de F sur $\mathbb{R}$.

(2). Dresser alors le tableau de variation de F sur $\mathbb{R}$.

(3). Montrer alors que F ne s'annule qu'une seule fois sur $\mathbb{R}$.

(4). Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de F au point d'abscisse -1.

□

5 . Techniques de calculs d'intégrales

Théorème 12 – Théorème d'intégration par parties

Si $u : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$,

alors $$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

□

Point méthode 1 – Effectuer une intégration par parties

Pour calculer $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ par une intégration par parties :

- On écrit $f(t)$ sous la forme d'un produit en convenant qu'un des deux facteurs est $u'(t)$:

$$\forall t \in [a;b]\,,\quad f(t) = \underbrace{1^{\text{e}}\text{ facteur}}_{=u'(t)} \times \underbrace{2^{\text{e}}\text{ facteur}}_{=v(t)}$$

On **explicite ce choix** à l'aide d'un présentation qui pourrait être par exemple :

$$\begin{array}{lcl} u(t) = \ldots\ldots & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & u'(t) = 1^{\text{e}}\text{ facteur} \\ v(t) = 2^{\text{e}}\text{ facteur} & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & v'(t) = \ldots\ldots \end{array}$$

- On détermine les deux éléments manquant dans ce schéma de présentation ;
- On met ensuite en forme la formule d'intégration par parties et on espère savoir calculer la nouvelle intégrale obtenue...

□

Exemple 1 – Descente de degrés

?

Calculer $\displaystyle\int_0^1 (t^2+t+1)\,\mathrm{e}^{\,t}\,\mathrm{d}x.$

□

Application| [3247] | 3| Intégrer par parties

Calculer $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x\ln(x)\,\mathrm{d}x.$

□

Théorème 13 – Changement de variables

Si $u : I \longrightarrow J$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue.

alors pour tout $(a,b) \in I \times I$, on a : $\displaystyle\int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(u(t))\,u'(t)\,\mathrm{d}t$

□

Point méthode 2 – Effectuer un changement de variable

Pour exploiter cette formule, on écrit :

$$\begin{array}{c|ll} x = u(t) & \text{pour } t = a & \text{on a : } x = u(a) \\ \text{et} & & \\ \mathrm{d}x = u'(t)\,\mathrm{d}t & \text{pour } t = b & \text{on a : } x = u(b) \end{array}$$

On peut alors transformer l'intégrale initiale en une nouvelle intégrale que l'on espère savoir calculer. . . .

On dit dans ce cas que l'on a réalisé **le changement de variable défini par la relation**

$$\underset{\substack{\text{La nouvelle variable } x \\ \text{est exprimée en fonction de l'ancienne } t}}{x = u(t)}$$

Rédaction possible

On effectue le changement de variable $x = \underbrace{\ldots\ldots}_{u(t)}$

dans l'intégrale . . . à partir des relations :

$$\begin{array}{c|ll} x = \underbrace{\ldots\ldots}_{u(t)} & \textit{pour } t = \underbrace{\ldots\ldots}_{a} & \textit{on a : } x = \underbrace{\ldots\ldots}_{u(a)} \\ \textit{et} & & \\ \mathrm{d}x = \underbrace{\ldots\ldots}_{u'(t)}\,\mathrm{d}t & \textit{pour } t = \underbrace{\ldots\ldots}_{b} & \textit{on a : } x = \underbrace{\ldots\ldots}_{u(b)} \end{array}$$

ainsi on a : . . .

□

Application| [3249] | 4| Effectuer un changement de variable

Calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos^2(t)}{1+\cos^2(t)} \sin(t)\,\mathrm{d}t$ à l'aide du changement de variable $x = \cos(t)$.

□

Application| [3250] | 5| Effectuer un changement de variable

Calculer $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, à l'aide du changement de variable $x = \sin(t)$.

□

Application| [3251] | 6| Effectuer un changement de variable

Calculer $I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variable $t = \sqrt{x+1}$.

□

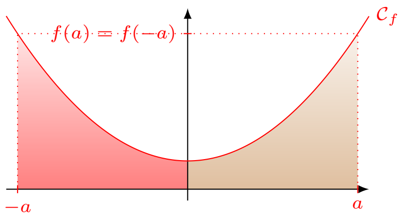
6 . Intégrale d'une fonction paire, impaire ou périodique

Proposition 1 – Intégrale d'une fonction paire ou impaire

Soient $a \in \mathbb{R}_+$ et $f : [-a; a] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction **continue** sur $[-a; a]$.

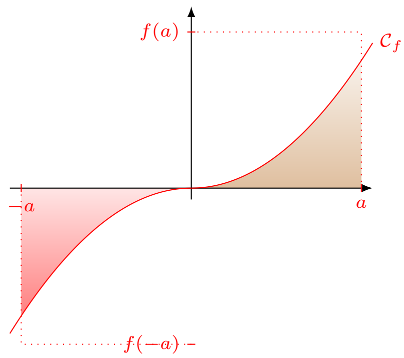
Si f est paire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$

Éléments de preuve:
On a $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t.$



Si f est impaire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$

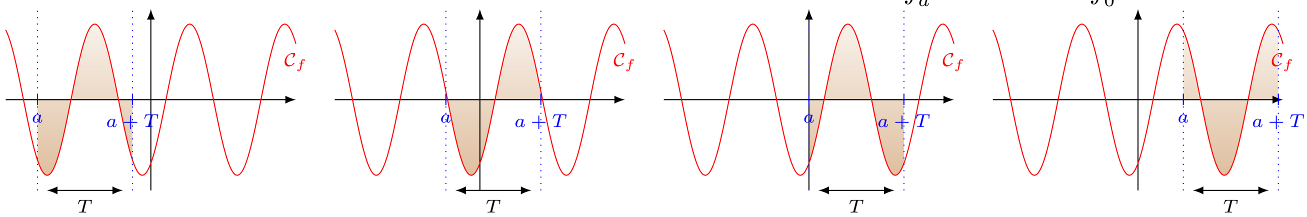
Éléments de preuve:
On a $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t.$



$\square$

Proposition 2 – Intégrale d'une fonction périodique

Si f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ $T-$périodique, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a : $\displaystyle\int_{a}^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{T} f(t)\,\mathrm{d}t$



$\square$