AL09

Image et noyau d'une matrice

Version du 12-08-2022 à 16:35

Contexte

Dans tout ce qui suit, sauf mention contraire, n, p et q désignent des entiers naturels non nuls.

Afin d'alléger les énoncés qui vont suivre, $A = (a_{ij})$ désigne une matrice de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

Pour une question de lisibilité, on notera par ailleurs (0) la matrice nulle de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, en précisant éventuellement en indice sa taille par $(0)_{p\times q}$.

□

1. Application $X \longmapsto AX$

Théorème 1 – Linéarité

L'application $f : \begin{array}{|lcl} \mathscr{M}_{q,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$ vérifie les propriétés suivantes :

Image du vecteur nul de $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$	Image d'une combinaison linéaire

On retiendra que : .

On dira alors que f est une de $\mathscr{M}_{q,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

□

Application|[3377]| 1| Exploiter le caractère linéaire

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $f : \begin{array}{|lcl} \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$.

Calculer $f(X_1)$ et $f(X_2)$ où $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, puis $f(3X_1 - 2X_2)$.

□

CC BY NC ND

2. Utilisation de l'identification entre $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Proposition 1 – Isomorphisme entre $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

L'application

$$g : \begin{array}{|ccc} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \longmapsto & (x_1, \ldots, x_n) \end{array}$$

est bijective et on peut montrer qu'elle est linéaire [a].

a. voir théorème précédent

On pourra donc identifier [a] les matrices colonnes de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec les $n-$uplets de réels, c'est à dire les éléments de $\mathbb{R}^n$.

a. sans jamais perdre de vue sur quels éléments on travaille...

□

Proposition 2 – Expression analytique de $f : X \longmapsto AX$

On considère $f : \begin{array}{|ccc} \mathscr{M}_{q,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$.

Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix}$, on a donc :

On considère l'application $\tilde{f} : \begin{array}{|ccc} \mathbb{R}^q & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ x & \longmapsto & \tilde{f}(x) \end{array}$

où si $x = (x_1, \ldots, x_q)$ on a :

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) \quad = \quad & (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1q}x_q, \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2q}x_q, \\ & \ldots, \\ & a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pq}x_q) \end{aligned}$$

On peut montrer que $\tilde{f}$ est aussi une

.

En identifiant tout élément $x = (x_1, \ldots, x_q) \in \mathbb{R}^q$ à sa représentation matricielle sous forme de vecteur colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix}$ on peut identifier les applications $f : \mathscr{M}_{q,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $\tilde{f} : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^p$, les deux applications étant alors appelées applications linéaires canoniquement associées à la matrice A.

Les applications f et $\tilde{f}$ étant déterminées de manière unique par la donnée de A, cette dernière est alors appelée matrice associée à l'application f ou $\tilde{f}$.
$\tilde{f}$ est aussi appelée de f.

□

Application | [3379] | 2 | Retrouver une matrice

Retrouver la matrice A dont l'application linéaire canoniquement associée est l'application :

$$f : \begin{array}{|ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x - y + z, x - y - z, -3x - 2y + z) \end{array}$$

□

3. Noyau d'une matrice

Définition 1 – Noyau de A

On appelle de la matrice A, noté , l'ensemble des matrices colonnes $X \in \mathscr{M}_{q,1}(\mathbb{R})$ telles que .

où $f \quad : \quad X \longrightarrow AX$

☐

Exemple 1 – Vérifier si une matrice colonne appartient au noyau

Pour $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, les vecteur $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartiennent-ils à $\operatorname{Ker}(A)$?

☐

Proposition 3 – Structure vectorielle de $\operatorname{Ker}(A)$

Le noyau de $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ est un .

☐

Éléments de preuve:

Proposition 4 – Caractérisation du noyau par un système linéaire

Application à la recherche du noyau d'une matrice

Pour déterminer le noyau de la matrice A :

- on résout le **système homogène de matrice** A ;
- on essaie d'exprimer $\operatorname{Ker}(A)$ sous forme de $\operatorname{Vect}(X_1, \ldots, X_k)$.

☐

CC BY NC ND

Application| [3380] | 3| Recherche d'un noyau

Déterminer le noyau de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

□

4 . Image d'une matrice

Définition 2 – Image d'une matrice

On appelle de la matrice A, notée , l'ensemble des matrices colonnes tels qu'il matrice colonne $X \in \mathscr{M}_{q,1}(\mathbb{R})$ telle que .

Lien avec $f : X \longmapsto AX$

On a aussi :

□

Exemple 2 – Appartenir à l'image d'une matrice

Pour $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$:

le vecteur $B_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathrm{Im}\,(A)$ car on a

$A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \quad .$

le vecteur $B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à $\mathrm{Im}\,(A)$ car la recherche d'un vecteur $X_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ tel que se traduit par la résolution du système linéaire de matrice A et de second membre B_2 .

□

Proposition 5 – Structure vectorielle de $\mathrm{Im}\,(A)$

En notant $A = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_q \end{pmatrix}$, on a .
C'est donc un de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

Autrement dit, $\mathrm{Im}\,(A)$ est .

□

Proposition 6 – Caractérisation de l'image par un système linéaire

Application à la recherche de l'image d'une matrice

Pour déterminer l'image de la matrice A, et les éléments de $\mathrm{Im}\,(A)$ peuvent ainsi être décrits à l'aide d'équations linéaires.

□

Application| [3381] **| 4| Déterminer l'image d'une matrice**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Décrire $\mathrm{Im}\,(A)$ à l'aide d'équations.

□