AL08

Travailler en dimension finie

Version du 26-01-2023 à 13:06

Définition 1 – Notion d'espace vectoriel de dimension finie

On dit qu'un espace vectoriel E est de dimension finie lorsqu'il admet une famille génératrice possédant un nombre fini de vecteurs.

$\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel de dimension finie car est engendré par la famille des n vecteurs $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$.
le 1 est situé à la i^e place

$\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie car est engendré par la famille des $q \times p$ matrices élémentaires E_{ij}.

$\mathbb{R}_n[x]$ est un espace vectoriel de dimension finie car est engendré par la famille des $n+1$ polynômes $x \longmapsto x^k$ où $k \in [\![0; n]\!]$.

Si ce n'est pas le cas, on dira que E est de dimension infinie.

□

1. Théorèmes fondamentaux de la dimension finie

Théorème 1 – Lemme d'échange

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $n \in \mathbb{N}^*$.
Si $n+1$ vecteurs $(y_1, \ldots, y_{n+1})$ de E sont **combinaisons linéaires** de n vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$, alors la famille $(y_1, \ldots, y_{n+1})$ est **liée**.

Dans un $\mathbb{R}$-espace de dimension finie qui a une **partie génératrice à q éléments**, **toute partie libre a au plus q éléments**.

□

Éléments de preuve:
On considère E avec $\{x_1, \ldots, x_q\}$ partie génératrice à q éléments. Soit alors $\mathcal{L}$ une famille libre. On suppose que $\mathcal{L}$ comporte au moins $q+1$ éléments $y_1, \ldots, y_{q+1}$. Alors $(y_1, \ldots, y_{q+1})$ est une sous-famille de $\mathcal{L}$, donc libre, mais c'est aussi une combinaison linéaire des q vecteurs $x_1, \ldots, x_q$. Par le lemme d'échange, $y_1, \ldots, y_{q+1}$ est liée. C'est absurde, donc $\mathcal{L}$ est finie et de cardinal inférieur à q.

Théorème 2 – Théorème de la dimension

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie non réduit au vecteur nul.
E **admet alors au moins une base**. On a de plus :

(1). Toutes les **bases** de E ont **un nombre fini d'éléments**.

(2). Toutes les **bases** de E comportent le même nombre de vecteurs.

□

Éléments de preuve: E est de dimension finie, donc possède une partie génératrice finie à q éléments.

(1). Par le corollaire précédent, les bases sont des familles libres donc ont moins de q éléments et sont finies.

(2). Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ et $\mathcal{C} = \{f_1, \ldots, f_p\}$ deux bases de E. $\mathcal{B}$ est libre et $\mathcal{C}$ est génératrice donc $n \leq p$ et on a $p \leq n$ en échangeant le rôle des deux bases. D'où $n = p$

Définition 2 – Dimension d'un espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension fini, non réduit au vecteur nul.
Le **cardinal commun** à toutes les bases de E s'appelle la dimension de E et se note $\dim(E)$ et est un entier naturel non nul.
Par convention, **l'espace vectoriel réduit au vecteur nul** $\left\{\overrightarrow{0}\right\}$ est dit de **dimension nulle**.

□

Théorème 3 – Dimension des espaces usuels

$\dim(\mathbb{R}^n) = n$	$\dim(\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})) = q \times p$	$\dim(\mathbb{R}_n[x]) = n+1$

□

Théorème 4 – Dimension de $E \times F$

Si E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie, alors l'espace vectoriel produit $E \times F$ est aussi de dimension finie et on a $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$.

□

2. Dimension, liberté et familles génératrices

Proposition 1 – Taille des familles libres et génératrices

Dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension **finie** $n \in \mathbb{N}^*$:

- toute famille libre de E comporte moins de n vecteurs.
- toute famille génératrice de E comporte plus de n vecteurs.

□

Théorème 5 – Equivalence base, libre et génératrice

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de **dimension finie** $n \geq 1$ et $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_n)$ une **famille de** n **vecteurs** de E.
Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

$\mathcal{F}$ est une **base**	$\mathcal{F}$ est une **famille libre**	$\mathcal{F}$ est une **famille génératrice**

Montrer qu'une famille est une base en dimension finie

Si l'on sait que l'on travaille en dimension finie n et que l'on veut montrer qu'une famille de n vecteurs est une base, alors soit on s'assure de son caractère libre, soit on s'assure de son caractère générateur.

En d'autres termes, on utilise donc l'un des arguments suivants pour conclure :

Si $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une famille libre de n vecteurs dans un espace E de dimension n, alors $\mathcal{F}$ est une base de E.
Si $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une famille génératrice de n vecteurs dans un espace E de dimension n, alors $\mathcal{F}$ est une base de E.

□

Exemple 1 – Famille base de $\mathbb{R}^3$

On a déjà vu que la famille $\mathcal{F} = ((1,1,1), (1,2,3), (1,2,4))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. Comme c'est une famille libre de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ avec $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, on en déduit que c'est une base.

□

3 . Rang d'une famille de vecteurs

Proposition 2 – Sous-espace engendré par une famille finie

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ une famille **finie** de p vecteurs de E.

Le sous-espace vectoriel $F = \text{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p)$ est de dimension **finie** et on a $\dim(F) \leq p$.

□

Définition 3 – Rang d'une famille de vecteurs

Soit $\mathcal{F} = (u_i)_{i \in I}$ une famille **finie** ou **infinie** de vecteurs de E.
Si $\text{Vect}\,\left((u_i)_{i \in I}\right)$ est de dimension finie, alors on appelle rang de la famille $\mathcal{F} = (u_i)_{i \in I}$ noté $\text{rg}\,(\mathcal{F})$, la dimension de $\text{Vect}\,\left((u_i)_{i \in I}\right)$.

Ainsi, lorsque cela a du sens : $\text{rg}\,(\mathcal{F}) = \dim\left(\text{Vect}\,\left((u_i)_{i \in I}\right)\right)$.

□

Théorème 6 – Lien entre rang et cardinal de la famille

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ une famille de p vecteurs d'un $\mathbb{R}-$espace vectoriel E de dimension finie.
On rappelle que $\text{rg}\,(\mathcal{F}) = \dim(\text{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p))$.

$$(\text{rg}\,(\mathcal{F}) = p) \quad \Leftrightarrow \quad (\mathcal{F} \text{ est libre})$$

$$(\text{rg}\,(\mathcal{F}) = \dim(E)) \quad \Leftrightarrow \quad (E = \text{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p))$$

On retiendra en particulier que :
Si $\mathcal{F}$ est une famille de p vecteurs de rang p, alors $\mathcal{F}$ est libre.

□

Théorème 7 – Rang et matrice d'une famille de vecteurs

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ une famille de p vecteurs d'un $\mathbb{R}-$espace vectoriel E de dimension finie n muni d'une base $\mathcal{B}$.
On note $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}\,(u_1, \ldots, u_p)$.

Le rang de la famille $\mathcal{F}$ est égal au rang du système linéaire de matrice A, c'est à dire au rang de A.

Calcul du rang d'une famille FINIE de vecteurs en dimension finie

En reprenant les hypothèses du théorème précédent :
- On **échelonne en lignes** la matrice A à l'aide de la méthode du pivot de Gauss.
- Le nombre de pivots de la **matrice échelonnée équivalente en lignes** à A est donc égal au rang de la famille $\mathcal{F}$.

□

Application| [3414] | 1| Rang d'une famille de polynômes

On se place dans $\mathbb{R}_3[X]$. Quel est le rang de la famille $\mathcal{F} = (P_1, \ldots, P_5)$ où :

$$P_1 = 1 + 2X + X^2 - X^3$$
$$P_2 = 2 - 3X - X^2 + X^3$$
$$P_3 = 1 + X + 2X^3$$
$$P_4 = 2 + 9X + 3X^2 + X^3$$
$$P_5 = 4 + 24X + 8X^2 + 2X^3\,?$$

□

4 . Obtention de bases à partir de familles libres ou génératrices

Théorème 8 – Théorème de la base incomplète

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension **finie** $n \geq 1$.
Soit $\underbrace{(x_1, \ldots, x_p)}_{p \text{ vecteurs}}$ une famille libre de E, avec $p \leq n-1$.

Il existe $\underbrace{(x_{p+1}, \ldots, x_n)}_{n-p \text{ vecteurs}}$ vecteurs de E tels que $\Big(\underbrace{(x_1, \ldots, x_p)}_{\text{famille libre}}, \underbrace{(x_{p+1}, \ldots, x_n)}_{\text{que l'on complète}}\Big)$ soit une **base** de E.

Construction d'une base à partir d'une famille libre

Pour compléter une famille $(x_1, \ldots, x_p)$ en une base de E de dimension n, on peut chercher les $n-p$ vecteurs $(x_{p+1}, \ldots, x_n)$ manquant parmi les vecteurs d'une famille $(e_1, \ldots, e_q)$ **génératrice** de E.
Souvent, on utilisera une base existante (qui est donc génératrice) de E pour compléter la famille $(x_1, \ldots, x_p)$.

□

Éléments de preuve: On pose $\mathcal{L} = \{x_1, \ldots, x_p\}$ et on considère $\mathcal{G}$ une partie génératrice de E. On applique alors le théorème fondamental pour extraire une partie $\mathcal{G}_0$ de $\mathcal{G}$ de sorte que $\mathcal{L} \cup \mathcal{G}_0$ soit une base de E.

Application| [3415] | 2| Compléter une base

Les deux polynômes $P_1 = X^3 - 3X + 1$ et $P_2 = 2X^3 + X^2 - 1$ forment une famille libre de $\mathbb{R}_3[X]$. À l'aide de la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, compléter la famille $\mathcal{F} = (P_1, P_2)$ en une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

□

Théorème 9 – Extraction d'une base d'une famille génératrice

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension **finie** $n \geq 1$.
Soit $\mathcal{G} = \underbrace{(y_1, \ldots, y_q)}_{\substack{q \text{ vecteurs de } E \\ \text{donc } a\ priori\ q \geq n}}$ une famille génératrice de E.

On peut **extraire** de $\mathcal{G}$ une famille $\underbrace{\left(\overrightarrow{y_{i_1}}, \ldots, \overrightarrow{y_{i_n}}\right)}_{\substack{\text{on extrait } n \text{ vecteurs de } \mathcal{G} \\ \text{qui forment une base de } E}}$ qui soit une base de E.

Extraire une base d'une famille génératrice

Pour extraire d'une famille génératrice $\mathcal{G}$ une base de E, on essaie d'identifier les vecteurs qui sont combinaisons linéaires les uns des autres.

□

Application| [0222] | 3| Dimension finie

Dans $\mathbb{R}^4$, on donne : $u_1 = (2, 1, 3, -1)$, $u_2 = (-1, 1, -3, 1)$, $u_3 = (4, 5, 3, -1)$, et $u_4 = (1, 5, -3, 1)$.
Trouver une base et la dimension du sous-espace engendré par ces quatre vecteurs.

□

5. Dimension d'un sous-espace vectoriel

Théorème 10 – Dimension et sous-espace vectoriel

Si E est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie, alors tout sous-espace vectoriel F de E est aussi de dimension finie, et on a $\dim(F) \leq \dim(E)$.

On montre alors que : $(E = F) \Leftrightarrow (\dim(E) = \dim(F))$.

□

Éléments de preuve:
On note $n = \dim E$ et on considère F un sous-espace vectoriel de E.

(1). pour toute famille $\mathcal{F}$ de F ayant plus de $n+1$ éléments, $\mathcal{F}$ est une famille de E donc est liée. Donc $\mathcal{C} = \{\text{card}\mathcal{F} / \mathcal{F} \text{ famille libre de } F\} \subset \{1, \ldots, n\}$.

1e cas : $F = \{0\}$ donc $\dim F \leq \dim E$.

2e cas : $F \neq \{0\}$. $\mathcal{C}$ est alors non vide borné dans $\mathbb{N}$ donc il admet un maximum m est il existe une famille $\mathcal{B}$ libre de F de cardinal m. Ainsi $\mathcal{B}$ est libre maximale dans F donc c'est une base à m éléments, donc F est de dimension finie, et $\dim F = m \leq n = \dim E$.

(2). $\Rightarrow$? évident.
$\Leftarrow$? Soit F un sous-espace de E avec $\dim F = \dim E = n$. Il existe alors une base $(e_1, \ldots, e_n) = \mathcal{B}$ base de F. $\mathcal{B}$ est alors libre dans E. Donc par théorème, une famille libre de $n = \dim E$ vecteurs est une base de E, donc $E = \text{Vect}(\mathcal{B}) = F$, d'où le résultat.

Définition 4 – Hyperplan

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension **finie** $n \geq 1$.

Tout sous-espace vectoriel de E de **dimension** $n-1$ est appellé un hyperplan de E.

□

Application| [2144] | 4| Dimension d'un sous-espace

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P(1) = 0\}$.

(1). Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

(2). Déterminer une base de F.

(3). En déduire la dimension de F.

□

6. Caractérisation des bases par le rang

Théorème 11 – Rang et bases

Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension **finie** $n \geq 1$.
On considère $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ une famille de n vecteurs de E.

$$\left(\begin{array}{c} \mathcal{F} \text{ est une} \\ \text{base de } E \end{array} \right) \Leftrightarrow (\operatorname{rg}(\mathcal{F}) = \dim(E))$$

Autrement dit, une famille de n vecteurs d'un espace de dimension n est une base si, et seulement si, son rang est égal à n.

□

Application|[3417]| 5| Base et rang

La famille $\mathcal{F} = ((0,1,2,1), (-5,0,-2,3), (2,1,2,-1), (3,0,4,1))$ est-elle une base de $\mathbb{R}^4$?

□

Application|[3418]| 6| Base et rang

La famille $\mathcal{F} = \left(1 + 2X + 3X^2, -1 + 2X + X^2, 1 + X + X^2\right)$ forme-t-elle une base de $\mathbb{R}_2[X]$?

□

7. Opérations sur les vecteurs et conservation du rang

Théorème 12 – Conservation du rang d'une famille

Soit $\mathcal{F} = (u_i)_{i \in I}$ une famille **finie** ou **infinie** de vecteurs de E.
On ne change pas le rang la famille $\mathcal{F}$ lorsque :

- on retire le **vecteur nul** de la famille si ce dernier est présent
- on multiplie un des vecteurs **par un réel non nul**
- on permute **deux** vecteurs
- on ajoute à **un des vecteurs** de la famille **une combinaison linéaire de tous les autres**

□

Définition 5 – Opérations sur les colonnes d'une matrice

On définit les opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice A par :

Échanger deux colonnes

On peut échanger deux colonnes C_i et C_j avec $i \neq j$, opération notée $C_i \leftrightarrow C_j$.

Multiplier une colonne par une constante

On peut multiplier une colonne C_i par une constante $\lambda \neq 0$, opération notée $C_i \leftarrow \lambda C_i$.

Ajouter une colonne à une autre

On peut ajouter à la ligne C_i la ligne λC_j pour $i \neq j$, opération notée $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$.

Chacune de ces opérations est **inversible**, au sens où l'on peut revenir en arrière.

Matrice échelonnée en colonnes

Une matrice est dite **échelonnée en colonnes** lorsque les deux conditions suivantes sont réalisées :

« Partie droite » de la matrice

$$\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si une **colonne** est **entièrement nulle**, alors **toutes** les colonnes **suivantes** le sont **aussi**.

Forme « pseudo-triangulaire inférieure

$$\begin{pmatrix} \bullet & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans toute colonne non entièrement nulle à partir de la deuxième, le **premier coefficient non nul** à partir du **haut** est situé **plus bas** que le **premier coefficient non nul** de la colonne précédente.
De tels coefficients sont appelés des **pivots**.

On dira par ailleurs que l'on a effectué un échelonnement réduit en colonnes lorsque tous les **pivots** sont égaux à 1 et sont **les seuls éléments non nuls** de leur **ligne**.

Algorithme de Gauss en colonne pour les matrices

Faire opérer l'algorithme du pivot de Gauss en colonne pour les matrices consiste à construire une suite d'opérations élémentaires sur les colonnes, de sorte à transformer la matrice A en une matrice équivalente en colonne sà A, tout d'abord échelonnée, puis échelonnée réduite.

Toute matrice non nulle est donc équivalente en colonnes à une matrice échelonnée réduite en colonnes. On admettra que cette dernière est unique.

□

Théorème 13 – Rang et matrice d'une famille de vecteurs - Suite

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ une famille de p vecteurs d'un $\mathbb{R}-$espace vectoriel E de dimension finie n muni d'une base $\mathcal{B}$. On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_p)$.

Le rang de la famille $\mathcal{F}$ est égal au nombre de pivot de la matrice **échelonnée en colonnes** équivalente en colonnes à A.

Calcul du rang d'une famille FINIE de vecteurs en dimension finie - Suite

En reprenant les hypothèses du théorème précédent :

- On **échelonne** la matrice A à l'aide de la méthode du pivot de Gauss sur les **COLONNES**.
- Le nombre de pivots de la **matrice échelonnée équivalente en colonnes** à A est donc égal au rang de la famille $\mathcal{F}$.

$\square$

Application| [0226] **| 7| Dimension finie**

Dans $\mathbb{R}^5$ rapporté à sa base canonique, on donne les vecteurs :

$$u_1 = (2, 3, -3, 4, 2) \quad u_2 = (3, 6, -2, 5, 9)$$

$$u_3 = (7, 18, -2, 7, 7) \quad u_4 = (2, 4, -2, 3, 1)$$

Étudier le rang de la famille $(u_1, \ldots, u_4)$.

$\square$