AL07

Travailler dans les espaces vectoriels usuels de dimension finie

Version du 26-01-2023 à 12:54

Contexte

Dans tout ce qui suit, et sauf mention contraire, n, p et q désigneront des entiers naturels non nuls. □

1. Structure vectorielle de l'espace $\mathbb{R}^n$ et extension

Définition 1 – $\mathbb{R}^n$ le modèle de la dimension finie

Les deux opérations « addition » et « multiplication par un réel » définies sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x + y & = & (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \\ \lambda.x & = & (\lambda \times x_1, \ldots, \lambda \times x_n) \end{cases}$$

vérifient les propriétés ci-dessous et confèrent à $\mathbb{R}^n$ une structure d'espace vectoriel :

Stabilité par addition

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall y \in \mathbb{R}^n, x + y \in \mathbb{R}^n$$

Stabilité par multiplication par un réel

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda.x \in \mathbb{R}^n$$

et en particulier : $1.x = x$

Associativité et commutativité de l'addition

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall y \in \mathbb{R}^n, \forall z \in \mathbb{R}^n$$

$x + y = y + z$ et $(x + y) + z = x + (y + z)$

Élément neutre et opposé

Le vecteur $\overrightarrow{0} = (0, \ldots, 0)$ vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, x + \overrightarrow{0} = x$$

et : $\forall x \in \mathbb{R}^n, x + (-x) = \overrightarrow{0}$

Multiplication par un réel associative et distributive

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall y \in \mathbb{R}^n, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,$$

$\lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$ et $(\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$

On retiendra en particulier que $\mathbb{R}^n$ est stable par combinaison linéaire, c'est à dire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall y \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda.x + y \in \mathbb{R}^n$$

et c'est ce point en particulier qui caractérise la notion d'espace vectoriel.

De façon plus générale, tout ensemble E qui possède deux opérations « addition » et « multiplication par un réel » qui vérifient chacun de ces points, et appelé un $\mathbb{R}-$espace vectoriel et les éléments de E sont appelés des vecteurs. □

Proposition 1 – Structure vectorielle de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$

L'ensemble $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel pour les deux opérations « addition des matrices » et « multiplication d'une matrice par un réel ».

Lien avec $\mathbb{R}^{qp}$

Une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ est parfaitement identifiée par la donnée de ses $q \times p$ coefficients, cést à dire par un élément de $\mathbb{R}^{qp}$.

Par exemple, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ est parfaitement déterminée par le $6-$uplet $(1, 2, 3, -4, -1, 5)$.

Il y a donc une bijection naturelle entre $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^{qp}$:

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^{qp} \\ (a_{ij}) & \longmapsto & (a_{11}, \ldots, a_{1q}, a_{21}, \ldots, a_{2q}, \ldots, a_{p1}, \ldots, a_{pq}) \end{array} \right.$$

On remarquera par ailleurs le lien entre la manière dont sont définies les opérations « addition » et « multiplication par un réel » sur ces deux ensembles...

□

Éléments de preuve:
En effet, pour $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{ij}) \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, on a $A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda.A = (\lambda \times a_{ij}) \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.
Par ailleurs, l'élement neutre pour l'addition est clairement la matrice nulle de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, et le reste des propriétés se vérifient aisément.

Proposition 2 – Structure vectorielle de $\mathbb{R}_n[X]$

L'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel pour les opérations suivantes :

Addition de polynômes

Pour $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$ et $Q = b_0 + b_1X + \ldots + b_nX^n$, on définit le polynôme $P + Q$ par :

$$P+Q = (a_0 + b_0)+(a_1 + b_1) X+\ldots+(a_n + b_n) X^n$$

L'élément neutre pour l'addition est clairement le polynôme nul $\tilde{0} = 0+0\times x+0\times X^2+\ldots+0\times X^n$.

Pour $P = 2 - 2X + X^2$ et $Q = 3 + 4X - 2x^2$ dans $\mathbb{R}_2[X]$, on a :

$$\begin{array}{rcl} P + Q & = & (2 + 3) + (-2 + 4)x + (1 - 2)X^2 \\ & = & 5 + 2X - X^2 \end{array}$$

Multiplication d'un polynôme par un réel

Pour $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit le polynôme $\lambda.P$ par :

$$\lambda.P = \lambda \times a_0 + \lambda \times a_1X + \ldots + \lambda \times a_nX^n$$

Pour $P = 3 + X^2 - 2X^3 + X^4$ dans $\mathbb{R}_4[X]$ et $\lambda = 3$, on a :

$$\begin{array}{rcl} 3.P & = & 3 \times 3 + 3 \times 1X^2 - 3 \times 2X^3 + 3 \times 1X^4 \\ & = & 9 + 3X^2 - 6X^3 + 3X^4 \end{array}$$

Lien avec $\mathbb{R}^{n+1}$

Un polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ est parfaitement déterminé par la donnée de $n + 1$ réels $(a_0, \ldots, a_n)$.

Par exemple, dans $\mathbb{R}_3[X]$, le polynôme $P = -1+2X-X^2+3X^3$ est totalement identifié par le quadruplet $(-1, 2, -1, 3)$.

Il y a donc une bijection naturelle entre $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n & \longmapsto & (a_0, \ldots, a_n) \end{array} \right.$$

On remarquera par ailleurs le lien entre la manière dont sont définies les opérations « addition » et « multiplication par un réel » sur ces deux ensembles...

□

2. Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ et extension

Définition 2 – Sous-espace de $\mathbb{R}^n$ et définition générale

On dit qu'une partie F de $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ lorsque la restriction à F des deux opérations « addition » et « multiplication par un réel » définies sur $\mathbb{R}^n$ vérifient tous les points de la définition précédente.
Cela confère alors à F une structure d'espace vectoriel.

Caractérisation

Une partie F de $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ si, et seulement si :

$\overrightarrow{0} \in F$ $\quad$ $\forall x \in F, \forall y \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \lambda.x + y \in F$

On retiendra qu'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est une partie F stable par combinaison linéaire d'éléments de F.

Cadre plus général de la notion de sous-espace vectoriel

La définition précédente s'étend naturellement et permet de définir la notion de sous-espace vectoriel de tout autre espace vectoriel autre que $\mathbb{R}^n$.

On dit qu'une partie F d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E lorsque la restriction à F des deux opérations « addition » et « multiplication par un réel » définies sur E vérifient tous les points de la définition précédente.
Cela confère alors à F une structure d'espace vectoriel.

Caractérisation

Une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si :

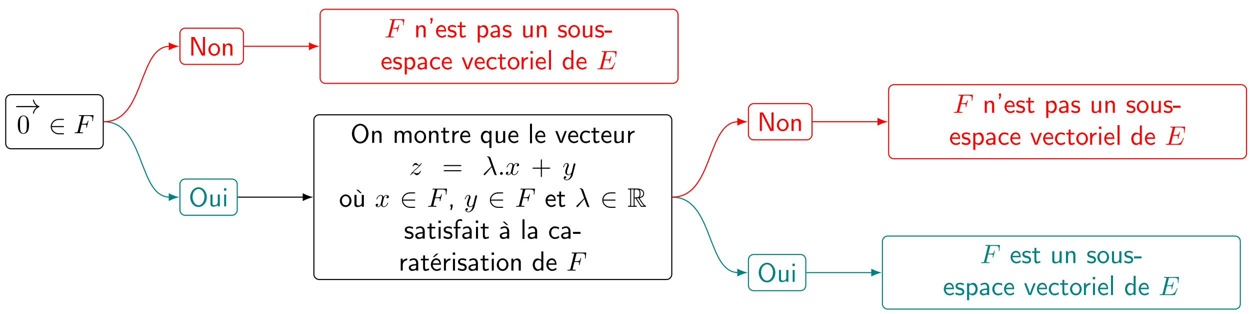
$\overrightarrow{0} \in F$ $\quad$ $\forall x \in F, \forall y \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \lambda.x + y \in F$

On retiendra qu'un sous-espace vectoriel de E est une partie F stable par combinaison linéaire d'éléments de F.

□

Point méthode 1 – Montrer qu'une partie $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E

On commence au préalable par identifier le vecteur nul de l'espace vectoriel E dans lequel on travaille.



□

Exemple 1 – Plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$

?

Montrer que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

□

Exemple 2 – Sous-espace des matrices symétriques

?

Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ M = {}^tM\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

□

Exemple 3 – Sous-espaces des polynômes s'annulant en 0

?

Montrer que $\mathcal{Q} = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P(0) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.

□

Contexte

Les énoncés qui suivent ici, étendent et généralisent les mêmes notions rencontrées dans le cadre du travail précédemment effectué dans $\mathbb{R}^n$.

Dans tout ce qui suit, sauf mention contraire, E désignera l'un des espaces vectoriels de référence que sont $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, ou tout autre espace vectoriel de dimension finie [a].

Pour simplifier les énoncés, on notera systématiquement que $\overrightarrow{0}$ le vecteur nul de E, notation que . l'on adaptera au contexte de travail : $\overrightarrow{0}$ pour $\mathbb{R}^n$, $\tilde{0}$ le polynôme nul pour $\mathbb{R}_n[X]$ et (0) la matrice nulle pour $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

□

a. voir plus tard

3 . Combinaison linéaire et sous-espace engendré par une famille

Définition 3 – Combinaison linéaire

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ une famille de p vecteurs de E.

On dit que le vecteur $u \in E$ est **combinaison linéaire des p vecteurs u_1, u_2,...,u_p** lorsqu'il existe p **réels** $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, appelés aussi **scalaires** tels que :

$$\begin{aligned} u &= \lambda_1.u_1 + \ldots + \lambda_p.u_p \\ &= \sum_{k=1}^{p} \lambda_k.u_k \end{aligned}$$

Les réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont appelés les **coefficients de la combinaison linéaire**.

Illustration

Dans $\mathbb{R}_3[X]$

Le polynôme $P = -12x + 10x^2$ est combinaison linéaire des polnômes $P_1 = 2 - 2x + 3x^2$ et $P_2 = -1 - 2x + X^2$ puisque l'on peut montrer que :

$$-12x+10x^2 = 2\times\left(2 - 2x + 3x^2\right)+4\times\left(-1 - 2x + X^2\right)$$

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

La matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire des deux matrices $\mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ puisque l'on peut montrer que :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

□

Définition 4 – Sous-espace engendré par une famille

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ une famille de p vecteurs de E.

L'**ensemble des combinaisons linéaires** des vecteurs de la famille $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ est :

$$\mathrm{Vect}\ (\mathcal{F}) = \{\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p,\ \lambda_1 \in \mathbb{R},\ \ldots,\ \lambda_p \in \mathbb{R}\}$$

Ce sous-ensemble de E est le **sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $\mathcal{F}$** ou par $(u_1, \ldots, u_p)$.

On note aussi $\mathrm{Vect}\ (u_1, \ldots, u_p)$ au lieu de $\mathrm{Vect}\ (\mathcal{F})$.

Stabilité par combinaison linéaire

Si $x \in \mathrm{Vect}\ (u_1, \ldots, u_p)$, $y \in \mathrm{Vect}\ (u_1, \ldots, u_p)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda.x + y \in \mathrm{Vect}\ (u_1, \ldots, u_p)$.

□

Exemple 4 – Expliciter et décrire un sous-espace engendré par une famille

? Donner deux éléments de $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\right)$ puis décrire ses éléments.

□

Point méthode 2 – Vérifier qu'un vecteur appartient à un sous-espace engendré par une famille

Étant donné une famille $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ de p vecteurs de E :

(Le vecteur $u \in E$ appartient à $\text{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p)$)

$\Leftrightarrow$ (Il existe p réels λ_1,...,λ_p tels que : $u = \lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2 + \ldots + \lambda_p.u_p \quad (\star)$)

La relation $(\star)$ se traduit souvent par un **système linéaire** dont il suffit de $\boxed{\text{s'assurer de la compatibilité}}$.

$(\star)$ $u = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p$ → Système linéaire $(A|U)$ d'inconnue $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ où A dépend de $u_1, \ldots, u_p$ et U de u

→ Système incompatible → $u \notin \text{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p)$

→ Système compatible → $u \in \text{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p)$

□

Définition 5 – Droites et plans vectoriels de E

Droite vectorielle

Tout sous-espace F de E qui s'écrit $F = \text{Vect}\,(e)$ où $e = (e_1, \ldots, e_n)$ non nul est appelé une droite vectorielle.

$$\begin{aligned}(x = (x_1, \ldots, x_n) \in \text{Vect}\,(e)) &\Leftrightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{R},\ x = \lambda.e)\\ &\Leftrightarrow \left(\exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x_1 = \lambda \times e_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda \times e_n \end{cases}\right)\end{aligned}$$

Plan vectoriel

Tout sous-espace F de E qui s'écrit $F = \text{Vect}\,(u, v)$ où $u = (u_1, \ldots, u_n)$ et $v = (v_1, \ldots, v_n)$ non nuls est appelé un plan vectoriel.

$$\begin{aligned}(x = (x_1, \ldots, x_n) \in \text{Vect}\,(u, v)) &\Leftrightarrow (\exists\,(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ x = \lambda.u + \mu.v)\\ &\Leftrightarrow \left(\exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x_1 = \lambda \times u_1 + \mu \times v_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda \times u_n + \mu \times v_2 \end{cases}\right)\end{aligned}$$

□

4. Familles libres et liées

Contexte

Dans tout ce paragraphe, sauf mention contraire, on désigne par $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ une famille de p vecteurs de E. □

Définition 6 – Famille libre

La famille $\mathcal{F}$ est une **famille libre de E** lorsque :

$$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, \qquad \left(\lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2 + \ldots + \lambda_p.u_p = \overrightarrow{0}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \\ & \vdots & \\ \lambda_p & = & 0 \end{cases}$$

Une famille qui n'est pas libre est dite **liée**.

Interprétatiion

La famille $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ est **libre** lorsque la seule manière d'écrire le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ avec une combinaison linéaire des p vecteurs $u_1, \ldots, u_p$ c'est de le faire à l'aide de la combinaion linéaire triviale $0.u_1 + 0.u_2 + \ldots + 0.u_p = \overrightarrow{0}$ □

Exemple 5 – Un famille liée de $\mathbb{R}_2[X]$

La famille formée par les polynômes $P_1 = 2 - 2X + 3X^2$, $P_2 = -1 - 2X + X^2$ et $P_3 = -12X + 10X^2$ est une famille liée de $\mathbb{R}_2[X]$ puisque : $2 \times \left(2 - 2X + 3X^2\right) + 4 \times \left(-1 - 2X + X^2\right) - 1 \times \left(-12X + 10X^2\right) = \tilde{0}$ □

Point méthode 3 – Étude de la liberté d'une famille de vecteurs de E

Pour étudier la liberté d'une famille $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ de p vecteurs de E :

- on suppose que l'on a une **combinaison linéaire nulle** de ces n vecteurs, c'est à dire que l'on a $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p = \overrightarrow{0}$ où $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$.
- on traduit cette combinaison linéaire sous forme d'un **système linéaire homogène** à n équations et p inconnues.
- on résout le **système que l'on sait être compatible** :
  - ↪ si l'on trouve comme **seule solution** $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0$, alors la famille est **libre** ;
  - ↪ sinon, la famille est liée.

$\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p = \overrightarrow{0} \quad (\star)$ → Système homogène $(A|0)$ d'inconnue $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$

→ Au moins un des λ_i est non nul → $\mathcal{F}$ est liée

→ $\begin{cases} \lambda_1 & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_p & = & 0 \end{cases}$ → $\mathcal{F}$ est libre

□

Exemple 6 – Famille libre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Étudier la liberté de la famille $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Proposition 3 – Relation de dépendance

Toute famille qui contient le vecteur nul est une famille liée .

On rappelle qu'une famille est liée lorsqu'elle n'est pas libre.

$$\text{(La famille } \mathcal{F} = (u_1,\,\ldots,\,u_p) \text{ est liée)} \Leftrightarrow \text{(Un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres)}$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(\begin{array}{c} \exists k \in [\![1;p]\!]\,,\ \exists\,(\lambda_1,\ldots,\lambda_{k-1},\lambda_{k+1},\ldots,\lambda_p) \in \mathbb{R}^{n-1}, \\ u_k = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_{k-1}u_{k-1} + \lambda_{k+1}u_{k+1} + \ldots + \lambda_p u_p \end{array}\right)}_{\text{Relation de dépendance}}$$

Conséquence pour un sous-espace engendré par une famille

On remarquera que dans le cas d'une famille liée, **on ne modifiera par l'espace engendrée par cette famille si l'on retire de cette dernière le vecteur u_k défini dans la relation précédente**.

Ilustration

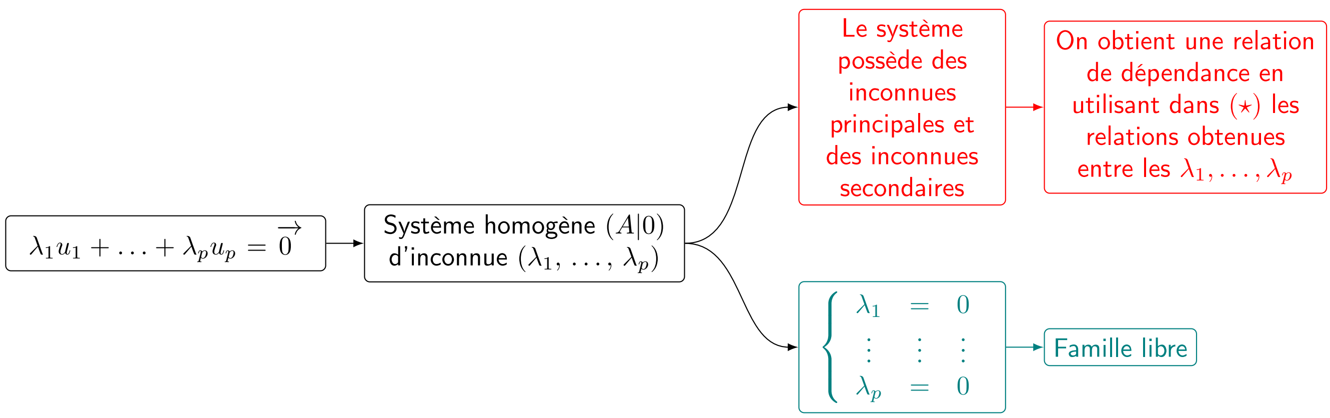
La famille de polynômes $P_1 = 2 - 2X + 3X^2$, $P_2 = -1 - 2X + X^2$ et $P_3 = -12X + 10X^2$ étant liée avec la relation de dépendance $P_3 = 2P_1 + 4P_2$, on peut donc écrire que $\text{Vect}\,(P_1, P_2, P_3) = \text{Vect}\,(P_1, P_2)$.

□

Point méthode 4 – Obtenir une relation de dépendance

Pour trouver une relation de dépendance dans une famille $\mathcal{F} = (u_1,\,\ldots,\,u_p)$ de p vecteurs de E :

- on procède comme si l'on cherchait à montrer qu'elle est libre à partir d'une combinaison linéaire nulle des p vecteurs de $\mathcal{F}$: $(\star) : \lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2 + \ldots + \lambda_p.u_p = \overrightarrow{0}$.
- dès lors que l'on est assuré du caractère lié de la famille, la résolution du système ainsi écrit, donne des relations entre λ_1, ..., λ_p que l'on écrit pour en déduire une relation entre les vecteurs u_1,. . .,u_p.



□

Application| [3401] | 1| Famille liée de matrices

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que la famille $\mathcal{F} = \left(\mathrm{I}_3, A, A^2, A^3\right)$ est liée et trouver une relation de dépendance.

□

Proposition 4 – Vecteurs colinéaires et liberté

On dit que deux vecteurs u et v non nuls de E sont colinéaires lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda.v$, et on conviendra que le vecteur nul est colinéaire à tous les autres vecteurs.

Si u et v sont deux vecteurs non nuls non colinéaires, alors la famille $\mathcal{F} = (u, v)$ est une famille libre.

Si u et v sont deux vecteurs colinéaires, alors la famille $\mathcal{F} = (u, v)$ est une famille liée.

□

Théorème 1 – Rajout et suppression d'éléments dans des familles libres et liées

Diminution d'une famille libre

Si $\mathcal{F}$ est une famille libre de E, alors toute famille $\mathcal{F}'$ extraite de $\mathcal{F}$ est encore libre.

Augmentation d'une famille liée

Si $\mathcal{F}$ est une famille liée, alors toute famille $\mathcal{F}'$ obtenue en rajoutant à $\mathcal{F}$ un vecteur est encore liée.

□

Théorème 2 – Famille de polynômes de degré échelonnés

On dit que $P_1, \ldots P_k$ forment une famille de polynômes de degrés échelonnés, lorsque :

$$\deg(P_1) < \deg(P_2) < \ldots < \deg(P_k)$$

La famille formée par les polynômes 1, X et X^2 est une famille de polynômes de degrés échelonnés.

La famille formée par les polynômes 3, $2X^2+3$ et X^3-X+1 est une famille de polynômes de degrés échelonnés.

La famille formée par les polynômes 1, $X-1$, $X+1$ et X^2 n'est pas une famille de polynômes de degrés échelonnés.

Liberté d'une famille de polynômes de degrés échelonnés

Si $\mathcal{F} = (P_1, \ldots, P_k)$ est une famille de polynômes de degrés échelonnés, alors $\mathcal{F}$ est une famille libre.

□

5. Familles génératrices d'un sous-espace vectoriel

Contexte

Dans tout ce qui suit, sauf mention contraire, F désigne un sous-espace vectoriel de E.

□

Définition 7 – Famille génératrice de F

La famille $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ est dite **génératrice** de F, et on écrit $\operatorname{Vect}(\mathcal{F}) = F$ ou $\operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_p) = F$ lorsque tout vecteur de F s'écrit comme une combinaison linéaire des p vecteurs u_1, $u_2, \ldots$, u_p.

Cette définition se traduit par l'assertion : $\forall u \in F, \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, \quad \underbrace{u = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p}_{u \text{ est combinaison linéaire de } u_1, \ldots, u_p}$

□

Proposition 5 – Familles géneratrices des espaces usuels

Famille génératrice de $\mathbb{R}^n$

La famille des n vecteurs e_i où $e_i = \underbrace{(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)}_{\text{le 1 est à la } i^{\text{e}} \text{ place}}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$.

Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$, on a clairement que : $(x, y, z) = x.(1,0,0) + y.(0,1,0) + z.(0,0,1)$.

Famille génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$

La famille des $n+1$ polynômes $x \longmapsto X^k$ où $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$.

Par exemple, dans $\mathbb{R}_3[X]$, on a $d + cX + bX^2 + aX^3 = d \times 1 + c \times X + b \times X^2 + a \times X^3$.

Famille génératrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$

La famille des $q \times p$ matrices élémentaires E_{ij} est une famille génératrice de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

Par exemple, dans $\mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□

Exemple 7 – Famille génératrice d'un sous-espace de $\mathbb{R}^3$

On admet que $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y - z = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Déterminer une famille génétratrice de F.

□

6. Notion de base et exemples usuels

Définition 8 – Base d'un espace vectoriel

On dit que la famille $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_p)$ est une base de E lorsqu'elle est libre et génératrice.

Caractérisation par unicité de la décomposition

La famille $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_p)$ est une base de E lorsque tout vecteur u de E se décompose de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs $u_1,\dots,u_p$.

Lorsque c'est le cas, pour tout $u \in E$, il existe un unique $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que :

$$u = \lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2 + \dots + \lambda_p.u_p$$

On dit alors que les p réels $\lambda_1,\dots, \lambda_p$ sont les coordonnées du vecteur u dans la base $\mathcal{B}$.

Illustration

On peut montrer que la famille $\mathcal{B} = ((1,1,-1),(0,2,0),(1,0,1))$ forme une base de $\mathbb{R}^3$ et que le vecteur $(1,-2,-1)$ a pour coordonnées $\left(1,-\frac{3}{2},0\right)$ dans la base $\mathcal{B}$ puisque : $(1,-2,-1) = 1\,(1,1,-1) - \frac{3}{2}\,(0,2,0) - 0\,(1,0,1)$

□

Théorème 3 – Bases canoniques des espaces usuels

Base canoniques de $\mathbb{R}^n$

La famille des n vecteurs e_i où $e_i = (0,\dots,0,\underbrace{1}_{\text{le 1 est à la } i^{\text{e}} \text{ place}},0,\dots,0)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

Base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$

La famille des $n+1$ polynômes $x \longmapsto X^k$ où $k \in \{0,1,\dots,n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Base canonique de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$

La famille des $q \times p$ matrices élémentaires E_{ij} est une base de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

□

Exemple 8 – Une autre base de $\mathbb{R}^3$

Montrer que la famille $\mathcal{F} = ((1,1,1),(1,2,3),(1,2,4))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

□

Application| [3404] | 2| **Base de polynômes**

Montrer que $\left(X^2+1, X^2+X-1, 2X\right)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

□

7. Représentation matricielle d'une famille de vecteurs

Contexte

Dans tout ce paragraphe, E désignera un $\mathbb{R}-$espace vectoriel et on supposera que $\mathcal{B}=(e_1, \ldots, e_n)$ une $\boxed{\text{base}}$ de E.

Ainsi, **tout** vecteur $x \in E$ peut s'écrire (de manière unique) sous la forme $x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ où $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Les réels $\boxed{x_1, \ldots, x_n}$ sont donc les **coordonnées** de x dans $\mathcal{B}$.

□

Définition 9 – Représentation matricielle d'un vecteur

On peut **identifier** le vecteur $x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ à la **matrice colonne** appelée aussi **vecteur colonne** $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

□

Exemple 9 – Quelques représentations matricielles de vecteurs

On se place dans $\mathbb{R}^4$, et on note $\mathcal{B}=(e_1, \ldots, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
Le vecteur $u=(2,-3,4,-1)$ s'écrivant :

$$\begin{aligned} u &= 2\underbrace{(1,0,0,0)}_{e_1}-3\underbrace{(0,1,0,0)}_{e_2}+4\underbrace{(0,0,1,0)}_{e_3}-1\underbrace{(0,0,0,1)}_{e_4} \\ &= 2e_1-3e_2+4e_3-e_4 \end{aligned}$$

sa représentation matricielle dans $\mathcal{B}$ notée U est : $U=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

On se place dans $\mathbb{R}_3[X]$ et on note $\mathcal{B} = \left(1, X, X^2, X^3\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
Le polynôme $P = 2 - 3X + 4X^2 - X^3$ s'écrivant :$P = 2 \times 1 + (-3) \times X + 4 \times X^2 + (-1) \times X^3$

a pour représentation matricielle dans $\mathcal{B}$ le vecteur colonne encore abusivement ici noté P : $P = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$

On se place dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et on note $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{2,1}, E_{1,2}, E_{2,2})$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

La matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ s'écrivant :

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= 2\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=E_{1,1}} + (-3)\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=E_{2,1}} + 4\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=E_{1,2}} + (-1)\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=E_{2,2}} \end{aligned}$$

sa représentation matricielle dans $\mathcal{B}$ notée ici $\tilde{M}$ sera : $\tilde{M} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

On méditera sur la situation que l'on vient de rencontrer. . .*où l'on a ici trois objets mathématiques différents, mais qui sont représentés par le même objet finalement. . .*

□

Remarque 1 – Attention à l'ordre des vecteurs de la base

On se place dans $\mathbb{R}_3[X]$ et on note $\mathcal{B}' = \left(X^3, X^2, X, 1\right)$ et $\mathcal{B}'' = \left(X^3, 1, X^2, X\right)$ <u>deux autres bases</u> de $\mathbb{R}_3[X]$.
Le polynôme $P = 2 - 3X + 4X^2 - X^3$ s'écrivant :

$$\begin{aligned} P &= (-1) \times X^3 + 4 \times X^2 + (-3) \times X + 2 \times 1 \\ &= (-1) \times X^3 + 2 \times 1 + 4 \times X^2 + (-3) \times X \end{aligned}$$

sa représentation matricielle dans $\mathcal{B}'$ est $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$ et dans $\mathcal{B}''$ sera $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}''}$.

□

Définition 10 – Représentation matricielle d'une famille de vecteurs

Si l'on considère $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ une famille de p vecteurs de E, on appelle **matrice de la famille $\mathcal{F}$ dans la base** $\mathcal{B}$, la matrice A dont les colonnes sont les vecteurs colonnes $U_1, \ldots, U_p$ associés à $u_1, \ldots, u_p$.

On note alors $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_p)$ et $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

□

Exemple 10 – Quelques représentations matricielles de familles

On se place dans $\mathbb{R}^4$, et on note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
On désigne par $\mathcal{F} = (u, v, w)$ où $u = (2, -3, 4, -1)$, $v = (1, -1, 2, 0)$ et $w = (-1, -3, 1, 2)$.

La matrice $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{B}$ est donc : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u, v, w) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$

On se place dans $\mathbb{R}_3[X]$ et on note $\mathcal{B} = \left(1, X, X^2, X^3\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
On désigne par $\mathcal{F} = (P, Q, R)$ où $P = 2 - 3X + 4X^2 - X^3$, $Q = 1 - X + 2X^2$ et $R = -1 - 3X + X^2 + 2X^3$.

La matrice $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{B}$ est donc : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P, Q, R) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$

□

Point méthode 5 – Écrire la matrice d'une famille de vecteurs

Pour écrire la **matrice** d'une famille de vecteurs dans une base $\mathcal{B}$ donnée de E, on **écrit en** $\boxed{\textbf{colonne}}$ **les coordonnées des vecteurs de la famille**.

□

Application|[3412]| 3| Matrice d'une famille de vecteurs

Écrire la matrice de $\mathcal{F}$ dans la base canonique de E lorsque :

(1). $\mathcal{F} = ((X-1)(X+1), (X+1)(X+2), (X-1)(X-2), (X+1)(X-2), (X-1)(X+2))$ et $E = \mathbb{R}_2[X]$;

(2). $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$ et $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

□

8 . Deux résultats structurels sur les espaces vectoriels

Théorème 4 – Espace vectoriel produit

Pour deux ensembles E et F, on appelle produit cartésien des ensembles E et F, l'ensemble noté $E \times F$ défini par : $E \times F = \{(e, f)\,,\, e \in E,\ f \in F\}$.

Soient E et F deux $\mathbb{R}-$espaces vectoriels. Les deux opérations « addition » et « multiplication par un réel » définies par :

$$\forall (x, y) \in E \times F,\ \forall (x', y') \in E \times F,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \text{ et } \lambda.(x, y) = (\lambda.x, \lambda.y)$$

munissent l'ensemble produit $E \times F$ d'une structure de $\mathbb{R}-$espace vectoriel.

□

Théorème 5 – Intersection de sous-espaces

Toute intersection (finie ou infinie) de sous-espaces vectoriel d'un même $\mathbb{R}-$espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E.

□