AL06

Trace et transposition

Version du 12-08-2022 à 15:13

Contexte

Dans tout ce qui suit, sauf mention contraire, n, p et q désigneront des entiers naturels non nuls.

1 . Autour de la notion de trace

Définition 1 – Trace d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre n.
On appelle de A et on note le réel égal à la de A.

Ainsi, pour $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, on a $\operatorname{tr}(A) =$.

Exemple 1 – Calculs de trace

Donner la trace de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et de $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exemple 2 – Trace de la matrice I_n

La trace de la matrice I_n est égale à n. En effet :

Exemple 3 – Pour lutter contre les fausses idées

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il vient que $\operatorname{tr}(A) =$ c'est à dire $\operatorname{tr}(A) =$.
De même $\operatorname{tr}(B) =$, c'est à dire $\operatorname{tr}(B) =$.

De même pour $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, il vient que $\mathrm{tr}(C) =$ c'est à dire $\mathrm{tr}(C) =$.

☐

Théorème 1 – Linéarité de la trace

On définit l'application trace notée tr par : $\mathrm{tr} : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & \mathrm{tr}(A) \end{array} \right.$

L'application trace est , c'est à dire que :

☐

Éléments de preuve:
Soient $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = (b_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Le terme général de la matrice $\lambda A + B$ est $(\lambda a_{ij} + b_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Par suite :

Exemple 4 – Trace d'une combinaison linéaire

A, B et C sont trois matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de traces respectives 1, -2 et 3. Quelle est la trace de $3A - 6B + 2C$?

☐

Théorème 2 – Trace d'un produit

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors .

☐

Éléments de preuve: Pour $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = (b_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note $A \times B = (c_{ij})$ et $B \times A = (d_{ij})$.

Par défintition du produit matriciel, on a : $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$.

Ainsi les termes diagonaux de $A \times B$ sont donnés par : $c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$.

De même, $d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj}$ et donc les termes diagonaux de $B \times 1$ sont donnés par $d_{ii} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{ki}$.

Ainsi, on a :

Remarque 1 – A propos de $A \times B \neq B \times A$

On rappelle qu'en général $A \times B \neq B \times A$, et pourtant on a $\mathrm{tr}(A \times B) = \mathrm{tr}(B \times A)$.

□

Définition 2 – Matrices semblables

Les matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sont dites lorsqu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que .

□

Théorème 3 – Trace de deux matrices semblables

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices , alors A et B ont la .

□

Éléments de preuve:
Par définition de deux matrices semblables, on a :

2. Autour de la transposition

Définition 3 – Transposée d'une matrice

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

On appelle transposée de la matrice A notée ${}^tA$ la matrice de $\mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{R})$ définie par .

On remarque notamment que la transposition est involutive, c'est à dire ${}^t({}^tA) = A$.

□

Application|[3786]| 1| Transposée d'une matrice

Donner les transposées des trois matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 8 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□

Proposition 1 – Linéarité de la transposition

On peut définir l'application transposition notée ${}^t\bullet$ par : ${}^t\bullet : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & {}^tA \end{array} \right.$

L'application ${}^t\bullet$ est , c'est à dire :

□

Définition 4 – Matrices carrées symétriques et antisymétriques

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Matrices symétriques

On dira que A est lorsque .
On note alors $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Matrices antisymétriques

On dira que A est lorsque .
Tous les d'une matrice sont .
On note alors $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

□

Proposition 2 – Décomposition de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en somme directe

Pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on peut écrire :

On dira que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

□

Éléments de preuve:

Théorème 4 – Transposition et produit

Pour tout $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, on a :

□

Théorème 5 – Trace et transposée

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors : .

□

Éléments de preuve:

Théorème 6 – Inverse et transposée

Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, c'est à dire A est ,
alors ${}^tA$ est aussi et on a :

□

Éléments de preuve: