AL05

Matrices inversibles

Version du 12-08-2022 à 14:59

Contexte

Dans tout ce qui suit, sauf mention contraire n désignera un entier naturel non nul.

□

1. Matrices carrées inversibles

Définition 1 – Matrice inversible

$M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est **inversible** lorsqu'il existe $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

La matrice N sera appelée **l'inverse de la matrice** M et sera noté .

L'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est noté appelé **groupe linéaire d'ordre** n **de** $\mathbb{R}$.

□

Théorème 1 – Matrices carrées inversibles

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

M est inversible	M est inversible à droite	M est inversible à gauche

□

Application| [3374] | 1| S'assurer du caractère inversible

Les matrices $N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ sont-elles inversibles et si oui quel est leur inverse ?

Indication : Calculer $M \times N$...

□

Application| [2115] | 2| Matrices

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A^2 - A - 2\mathrm{I}_3 = 0$, puis déduire que A est inversible et donner la valeur de A^{-1}.

□

2. Matrices inversibles et systèmes linéaires

Définition 2 – Système linéaire et produit matriciel

On considère le système linéaire $\mathcal{S}$ d'inconnues le $p-$uplet $(x_1, \ldots, x_p)$ de réels suivant :

$$(\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{lllllll} a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2+ & \ldots & +a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2+ & \ldots & +a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & +a_{n,2}x_2+ & \ldots & +a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array} \right.$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

la matrice associée au système $\mathcal{S}$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

la matrice colonne égale au second membre

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

la matrice colonne dont chaque coefficient correspond à une des inconnues $x_1, \ldots, x_p$.

On a donc que :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,p} \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}}_{=X} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2+ & \ldots & +a_{1,p}x_p \\ a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2+ & \ldots & +a_{2,p}x_p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & +a_{n,2}x_2+ & \ldots & +a_{n,p}x_p \end{pmatrix}}_{=B}$$

Ainsi :

Solution d'un système carré

Dans le cas où le système est carré, c'est à dire $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et que A est , la matrice X cherchée sera et dans ce cas X est **unique**.

□

Point méthode 1 – Obtention de l'inverse d'une matrice par résolution d'un système linéaire

L'inverse d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, s'obtient en résolvant le système de représentation matricielle $(A|B)$ où $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Illustration

Pour rechercher l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, on résout le système de représentation matricielle $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & b_1 \\ 1 & 2 & 2 & b_2 \\ 2 & 2 & 3 & b_3 \end{array}\right)$ par échelonnement en lignes : $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & b_1 \\ 1 & 2 & 2 & b_2 \\ 2 & 2 & 3 & b_3 \end{array}\right) \sim_L \dots \sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2b_1 + b_2 - 2b_3 \\ 0 & 1 & 0 & b_1 + 2b_2 - 2b_3 \\ 0 & 0 & 1 & -2b_1 - 2b_2 + 3b_3 \end{array}\right)$

pour en déduire que $A^{-1} =$.

En effet, cette dernière étape de la résolution revient à écrire qui est bien l'écriture

de $X =$.

□

Exemple 1 – Inverse d'une matrice 3×3

?

Déterminer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

□

Théorème 2 – Caractérisation des matrices inversibles par le rang d'un système linéaire associé

Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:

□

Théorème 3 – Condition d'inversibilité pour une matrice diagonale ou triangulaire

$\left(\begin{array}{c} \text{Une matrice } M = (a_{ij}) \text{ appartenant à l'un des ensembles} \\ \mathcal{D}_n(\mathbb{R}),\ \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R}) \text{ ou } \mathcal{T}_n^-(\mathbb{R}) \\ \text{est} \end{array} \right) \Leftrightarrow$

□

Application| [3375] | 3| Caractère inversible d'une matrice

Les matrices $A_1 = 2I_4 - E_{33}$, $A_2 = 4I_5 - 4E_{22}$ et $A_3 = 4I_4 - 5E_{23}$ sont-elles inversibles ?

□

3 . Recherche de l'inverse à l'aide d'une matrice augmentée

Introduction – Matrice augmentée et recherche d'inverse

Pour rechercher l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, on résout le système de représentation matricielle $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & b_1 \\ 1 & 2 & 2 & b_2 \\ 2 & 2 & 3 & b_3 \end{array}\right)$ que l'on pourrait encore présenter et si l'on « allège » les écritures

on travaillerait alors avec : .

L'échelonnement réduit en lignes donnerait alors que

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_L \dots \sim_L$$

et on y lit directement sur la partie droite de cette matrice augmentée $A^{-1} =$.

□

Point méthode 2 – Inverse à l'aide d'une matrice augmentée

Pour chercher l'inverse de la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on appliquera l'algorithme de Gauss à la matrice augmentée $\boxed{(A|I_n)}$ de sorte à obtenir une matrice échelonnée réduite en ligne équivalente à A.

- Si l'on obtient une **échelonnée réduite** la forme $\boxed{(I_n|A')}$, alors la matrice A est inversible d'inverse $A^{-1} = A'$:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} & 1 & & (0) \\ A & & \ddots & \\ & (0) & & 1 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \cdots \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & (0) & \\ & \ddots & & A' \\ (0) & & 1 & \end{array}\right)$$

- Sinon, la matrice A n'est pas inversible puisque n'a pas n pivots non nuls.

On s'apercevra donc que la matrice A est **inversible ou non** lors de sa mise sous forme échelonnée avec l'apparition éventuelle de pivots nuls.

□

Exemple 2 – Inverse d'une matrice 3×3

?

Déterminer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

□

4. Inverse d'un produit de matrices

Théorème 4 – Inverse d'un produit de matrices inversibles

Si M et N deux matrices de ,
alors matrice $M \times N$ est alors **inversible** et son inverse est : .

□

Application| [3376] | **4**| **Inverse d'un produit**

Soit $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ où $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(1). Expliciter la matrice $A = PDP^{-1}$.

(2). En déduire que A est inversible puis déterminer la matrice A^{-1}.

□

5. Opérations élémentaires et matrices inversibles

Introduction

Pour $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ où l'on note L_1, L_2 et L_3 les lignes de A, c'est à dire $A = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$, on observe que :

Opération $L_1 \leftrightarrow L_2$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=M_1} \times A =$$

$M_1 = \mathrm{I}_3 - E_{11} - E_{22} + E_{12} + E_{21}$

Opération $L_3 \leftarrow 5L_3$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}}_{=M_2} \times A =$$

$M_2 = \mathrm{I}_3 + (5-1) \times E_{33}$

Opération $L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}}_{=M_3} \times A =$$

$M_3 = \mathrm{I}_3 + 5E_{3,2}$

Les trois matrices M_1, M_2 et M_3 sont clairement inversibles, et construites à partir de la matrice identité et des matrices élémentaires, et ont permis de traduire à l'aide d'un produit de matrices, des opérations élémentaires.

□

Proposition 1 – Traduction matricielle des opérations élémentaires sur les lignes

Opération $L_i \leftrightarrow L_j$

On multiplie à gauche par la matrice $P_{i,j} = \mathrm{I}_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$.

Opération $L_i \leftarrow \lambda L_i$

On multiplie à gauche par la matrice

$$D_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & (0) & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

où λ est situé sur la i^{e} ligne.

En fait : $D_i(\lambda) = \mathrm{I}_n + (\lambda - 1) E_{ii}$

Opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$

On multiplie à gauche par la matrice de transvection

$$T_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \lambda & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où λ est à la i^{e} ligne et j^{e} colonne.

En fait : $T_{ij}(\lambda) = \mathrm{I}_n + \lambda E_{ij}$

□

6. Caractérisation des matrices 2×2 inversibles

Définition 3 – Déterminant d'une matrice 2×2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

On appelle déterminant de A, noté $\det(A)$, le réel défini par :

$\square$

Théorème 5 – Caractérisation des matrices 2×2 inversibles par leur déterminant

Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

	et lorsque c'est le cas $A^{-1} =$

Illustration

Pour la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, on a $\det(A) =$ $\neq 0$ donc A est et on a $A^{-1} =$.

$\square$

Éléments de preuve:
On sait que : $(A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})) \quad \Leftrightarrow \quad (\mathrm{rg}(A) = 2)$
Il est immédiat qu'au moins trois coefficients de la matrice A doivent être non nuls pour que A soit inversible, car sinon, elle ne pourra pas être de rang 2 et donc inversible.
Sans perte de généralité, on peut supposer que a est non nul et on peut commencer un échelonnement en lignes pour chercher le rang de A :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow aL_2 - cL_1}{\sim_L} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}$$

Ainsi, la matrice A est inversible si, et seulement si, $ad - bc \neq 0$ car sinon, son rang n'est pas égal à 2.
Par ailleurs, sous l'hypothèse $\det(A) \neq 0$, le produit $A \times \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \mathrm{I}_2$ ce qui assure que de $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.