AL04

# Calcul matriciel

Version du 18-10-2022 à 14:49

**Contexte**

Dans tout ce chapitre et sauf mention contraire, $n$, $p$ et $q$ désigneront des entiers naturels non nuls. □

## 1. Notion de matrice

**Définition 1 – Matrice de type $(p,q)$, notation et vocabulaire**

On appelle **matrice de type $(p,q)$ à coefficients dans** $\mathbb{R}$, toute application de $[\![1;p]\!] \times [\![1;q]\!]$ dans $\mathbb{R}$, c'est à dire :

$$M : \left| \begin{array}{ccc} [\![1;p]\!] \times [\![1;q]\!] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (i,j) & \longmapsto & M(i,j) = a_{i,j} \end{array} \right.$$

On emploie ainsi une **notation indicielle**, où l'on note $M(i,j)$ sous la forme $a_{i,j}$.
Lorsque $i$ et $j$ sont quelconques, $a_{i,j}$ s'appelle le **terme général** de la matrice $M$.
Chaque $a_{i,j}$ s'appelle un **coefficient** de $M$.
Lorsqu'on veut donner $M$ avec seulement son terme général, on écrira : $M = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq j\leq q}}$ où $a_{i,j}$ pourra s'exprimer en fonction de $i$ et $j$.

**Explicitation sous forme d'un tableau de nombres**

On écrit $M$ sous la forme d'un **tableau rectangulaire** :

$$M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,q-1} & a_{1,q} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,q-1} & a_{2,q} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,q-1} & a_{1,q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & a_{p,3} & \cdots & a_{p,q-1} & a_{p,q} \end{pmatrix}$$

et tableau **comporte $p$ lignes et $q$ colonnes**.

La **ligne d'indice** $i$ est
$$\begin{pmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & a_{i,3} & \ldots & a_{i,q-1} & a_{i,q} \end{pmatrix}$$
et la **colonne d'indice** $j$ est $\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{p,j} \end{pmatrix}$.

On dit aussi de $M$ est une **matrice à $p$ lignes et $q$ colonnes**.

On note $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ l'ensemble de toutes les matrices de type $(p,q)$ à coefficients dans $\mathbb{R}$. □

**Application| [3366] | 1| Mise en oeuvre**

Pour chacune des matrices suivantes, à quel ensemble $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ appartiennent-elles ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \dots\dots \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \in \dots\dots \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \dots\dots$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \in \dots\dots \qquad \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \in \dots\dots; \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & n+2 \end{pmatrix} \in \dots\dots$$

$$\left(\cos(i+j)\right)_{\substack{1\leq i\leq 7 \\ 1\leq j\leq 4}} \in \dots\dots \qquad \left(a_p^q\right)_{\substack{1\leq p\leq n \\ 0\leq q\leq n-1}} \in \dots\dots \qquad \text{où } a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$$

□

**Application| [3367] | 2| Expliciter une matrice**

On considère l'application $M$ de $[\![1;3]\!] \times [\![1;2]\!]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $M : \left| \begin{array}{ccc} [\![1;3]\!] \times [\![1;2]\!] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (i,j) & \longmapsto & i \times j \end{array} \right.$. Écrire la matrice $M$ sous forme d'un tableau de nombres comme défini ci-dessus.

□

**Application| [2123] | 3| Matrice à partir de son terme général**

Écrire explicitement les matrices $A = (i+j)_{\substack{1\leq i\leq 2 \\ 1\leq j\leq 3}}$, $B = (5i-j)_{\substack{1\leq i\leq 4 \\ 1\leq j\leq 2}}$.

□

**Définition 2 – Compléments de vocabulaire**

Pour $M \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, chaque ligne s'identifie à un vecteur de $\mathbb{R}^q$ et chaque colonne s'identifie à un vecteur de $\mathbb{R}^p$.

- pour $\boxed{p=1}$ et $q$ quelconque, $M \in \mathscr{M}_{1,q}(\mathbb{R})$ s'appelle une **matrice ligne** et $\mathscr{M}_{1,q}(\mathbb{R})$ est en bijection évidente avec $\mathbb{R}^q$.
- pour $\boxed{q=1}$ et $p$ quelconque, $M \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ s'appelle une **matrice colonne** et $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ est en bijection évidente avec $\mathbb{R}^p$.
- pour $p=1$ et $q=1$, $\mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ est en bijection évidente avec $\mathbb{R}$.

□

**Définition 3 – Matrice carrée**

Une matrice $M$ est dire **carrée** lorsqu'elle a autant de lignes que de colonnes, c'est à dire si $M \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.
On dira dans ce cas que $M$ **est une matrice carrée d'ordre** $n$.
On notera alors $\boxed{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$.

**Matrice diagonale - $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$**

$$\boxed{\forall i \neq j, \quad a_{ij} = 0}$$
$$\begin{pmatrix} \bullet & & \\ & \bullet & (0) \\ & (0) & \ddots & \\ & & & \bullet \end{pmatrix}$$

**Triangulaire supérieure - $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$**

$$\boxed{\forall i > j, \quad a_{ij} = 0}$$
$$\begin{pmatrix} \bullet & \dots & \dots & \bullet \\ & \bullet & & \vdots \\ & (0) & \ddots & \vdots \\ & & & \bullet \end{pmatrix}$$

**Triangulaire inférieure - $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{R})$**

$$\boxed{\forall i < j, \quad a_{ij} = 0}$$
$$\begin{pmatrix} \bullet & & & \\ \vdots & \bullet & (0) & \\ \vdots & & \ddots & \\ \bullet & \dots & \dots & \bullet \end{pmatrix}$$

**Matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$**

$$\mathrm{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix}$$

□

# 2. Combinaisons linéaires de matrices

**Définition 4 – Somme de matrice**

$A$ et $B$ sont deux matrices de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ avec $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$. On définit :

**Somme de matrices**

la somme des matrices $A$ et $B$ comme étant la matrice de terme général $c_{ij}$ :

$$\forall (i,j) \in [\![1;p]\!] \times [\![1;q]\!] \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

**Élément neutre et opposé**

l'élément neutre pour l'addition des matrices est $(0)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ et s'appelle la **matrice nulle**.

Si $(a_{ij}) \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, alors son **opposé** est la matrice $(-a_{ij})$.

**Produit d'une matrice par un réel**

le produit de la matrice $A$ par le réel $\lambda \in \mathbb{R}$ comme étant la matrice : $\lambda.A = (\lambda \times a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$

□

**Application|** [3369] **| 4| Somme de matrices**

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -3 \\ 4 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

Calculez $A + B$ puis $2P - 3I_3$.

□

**Proposition 1 – Matrices élémentaires**

Les matrices $E_{ij} = (e_{ij})_{\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq j\leq q}}$ de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ où seul le coefficient d'indice $i, j$ (à l'intersection de la $i^e$ ligne et de la $j^e$ colonne) vaut 1, sont appellées les **matrices élémentaires** de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ .

**Toute matrice de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ peut s'exprimer comme combinaison linéaire des $p \times q$ matrices élémentaires $E_{ij}$.**

En particulier, pour $M = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, on a :

$$\boxed{M = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} a_{ij}E_{ij}}$$

□

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & 0 & & & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

**Application|** [3370] **| 5| Décomposition d'une matrice**

Écrire la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ comme combinaison linéaire des matrices élémentaires $E_{ij}$ dans $\mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

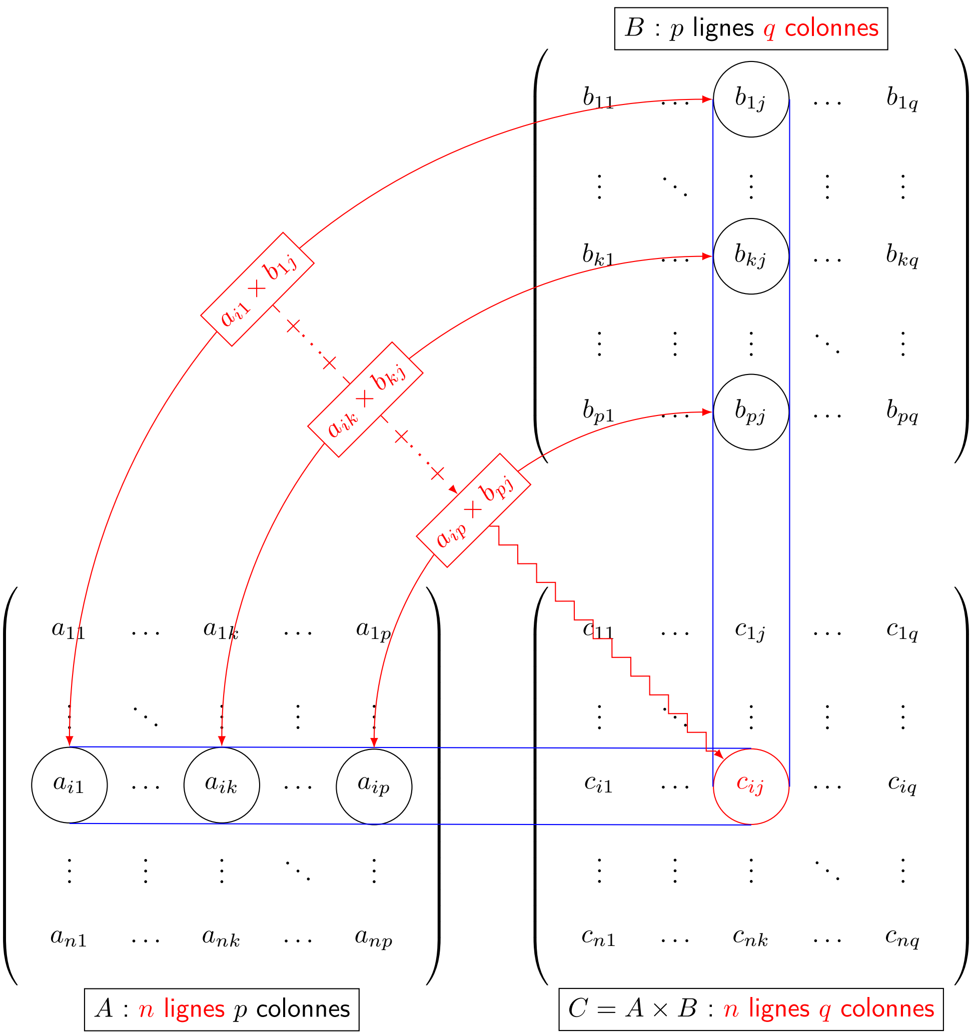
□

# 3. Produit de deux matrices

**Définition 5 – Produit de deux matrices**

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. On appelle **produit de** $A$ **par** $B$ la **matrice de** $\mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ dont le terme général $c_{ij}$ est donné par :

$$\forall 1 \leq i \leq n, \forall 1 \leq j \leq q, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \qquad (\star)$$




**Élément neutre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pour le produit des matrices**

La **matrice identité** $\mathrm{I}_n$ est l'élément neutre pour la multiplication dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, c'est à dire :

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad \mathrm{I}_n \times M = M \qquad \text{et} \qquad M \times \mathrm{I}_n = M$$

□

**Application| [2124] | 6| Matrices**

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 3 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$. Quels produits de matrices peut-on effectuer ?

□

**Application| [2125] | 7| Matrices**

Effectuer les produits matriciels suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□

**Remarque 1 – $A \times B \neq B \times A$ en général**

On a : $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 4 \\ 6 & 5 & 6 \\ 9 & 10 & 7 \end{pmatrix}$ mais $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 10 \\ 5 & 3 & 6 \\ 6 & 7 & 9 \end{pmatrix}$

On retiendra donc qu'en général $\boxed{A \times B \neq B \times A}$ surtout que parfois le produit $A \times B$ est possible alors que le produit $B \times A$ n'est pas possible compte-tenu des conditions sur la dimension des matrices pour pouvoir l'effectuer. □

**Proposition 2 – Propriétés opératoires**

Soient $A, A' \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $B, B' \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{R})$.

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C \quad \text{avec } C \in \mathscr{M}_{r,s}(\mathbb{R})$$

$$\lambda(A \times B) = (\lambda A) \times B = A \times (\lambda B) \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(A + A') \times B = (A \times B) + (A' \times B)$$

$$A \times (B + B') = (A \times B) + (A \times B')$$

□

# 4 . Extraction de lignes et colonnes par multiplication

**Proposition 3 – Multiplication à gauche ou a droite par une matrice élémentaire**

Soit $M \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ où l'on note $M = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_q \end{pmatrix}$ les colonnes de $M$ et $M = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_p \end{pmatrix}$ les lignes de $M$

**Multiplication à gauche ou à droite par une matrice ligne ou colonne élémentaire**

Multiplication à droite

$$M \times \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{q \times 1}}_{\text{Le 1 est situé à la } i^{\text{e}}\text{ligne}} = C_i$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Multiplication à gauche

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \underbrace{1}_{\text{Le 1 est situé à la } j^{\text{e}}\text{colonne}} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{1 \times p} \times M = L_j$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

## Multiplication à gauche ou à droite par une matrice élémentaire

**Pour $E_{i,j} \in \mathscr{M}_q(\mathbb{R})$**

$$\underbrace{M \times E_{i,j}}_{\in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})} = \begin{array}{c}\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & C_i & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \\ j^{\text{e}}\text{colonne} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

**Pour $E_{i,j} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$**

$$\underbrace{E_{i,j} \times M}_{\in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})} = \begin{array}{cc}\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ & & & L_j & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} & i^{\text{e}}\text{ligne} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□

### Application|[3371]| 8| Extraire les colonnes d'une matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 & -3 \\ -4 & 5 & 0 & -5 \end{pmatrix}$. Effectuez rapidement les produits matriciels suivants : $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times A$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times A$

□

## 5. Puissance et formule du binôme

**Définition 6 – Puissance d'une matrice carrée**

Pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, pour $k \in \mathbb{N}$ on définit $M^k = \underbrace{M \times M \times \ldots \times M}_{k \text{ facteurs}}$ en convenant que $\boxed{M^0 = \mathrm{I}_n}$. $\square$

**Théorème 1 – Formule du binôme**

Soit $(A, B) \in (\mathscr{M}_p(\mathbb{R}))^2$ telles que $A \times B = B \times A$ :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$$

$\square$

**Application| [3373] | 9| Manipuler le binôme de Newton**

$A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est telle que $A^2 = 2A$.

Que vaut alors $(A + \mathrm{I}_n)^5$ ? $\square$