AL03

Travailler dans $\mathbb{R}^n$

Version du 12-08-2022 à 12:53

Contexte

Dans tout ce qui suit n, p, et q désigneront des entiers naturels non nuls.

□

1 . Notion de $p-$uplets

Définition 1 – $p-$uplets d'éléments d'un ensemble E

Étant donné un ensemble E non vide, on désigne par $p-$uplet d'éléments de E

.

Lorsque $p = 2$, on parle de couple d'éléments de E, lorsque $p = 3$, on parle de triplet d'éléments de E, lorsque $p = 4$ on parle de quadruplet, etc. d'où la terminologie $p-$uplet.

Illustration

Pour $E = \{0, 1\}$, un $p-$uplet d'éléments de E est un suite finie de p éléments tous égaux soit à 0 soit à 1.
Par exemple, sont des triplets d'éléments de E.
De même, sont des $5-$uplets d'éléments de E.

Pour $E = [\![1; 6]\!]$ ensemble des entiers entre 1 et 6, un $p-$uplet d'éléments de E est une suite finie de p élḿents tous ègaux soit à 1, soit à 2, $\dots$, soit à 6.
Par exemple, sont des $4-$uplets d'éléments de E.
De même, sont des $6-$uplets d'éléments de E.

Produit cartésien d'un même ensemble E : l'ensemble E^p

On désigne par E^p l'ensemble des $p-$uplets d'éléments de E :

On peut aussi comprendre que $E^p =$.

□

Définition 2 – Ensemble $\mathbb{R}^n$

On note $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des $n-$uplets de réels : .

Cas particulier de $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2 =$

Par exemple, $(-1, 3)$, $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$, $\left(\pi, \frac{1}{2}\right)$ ou $\left(\ln(2), \sqrt{2}\right)$ sont des éléments de $\mathbb{R}^2$.

Cas particulier de $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^3 =$

Par exemple, $(1, 1, 0)$, $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$ ou $\left(\mathrm{e}^2, \sqrt{10}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ sont des éléments de $\mathbb{R}^3$.

□

2. Manipuler les éléments de $\mathbb{R}^2$

Définition 3 – Couple d'éléments de $\mathbb{R}$ et ensemble $\mathbb{R}^2$

Soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$.
On notera le **couple** formé par les deux réels x_1 et x_2, et on dit aussi que (x_1, x_2) et un .
On écrira alors .

Ensemble $\mathbb{R}^2$

On désignera par $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des couples de réels, c'est à dire :
Les éléments de $\mathbb{R}^2$ sont appelés des .

On adoptera l'<u>écriture</u> suivante : le x de $\mathbb{R}^2$ est le 2-uplet de réels .

Vecteur nul et égalité de vecteurs

Le couple noté est appelé le de l'ensemble $\mathbb{R}^2$.

Si , alors .

Opérations sur les éléments de $\mathbb{R}^2$ et structure vectorielle

Addition des vecteurs de $\mathbb{R}^2$

Pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$:

Multiplication par un scalaire

Pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

Commutativité de l'addition

$\forall x \in \mathbb{R}^2, \forall y \in \mathbb{R}^2,$

Élément neutre de l'addition

$\forall x \in \mathbb{R}^2,$

Ces deux opérations confèrent à $\mathbb{R}^2$ une structure dite d'espace vectoriel.

□

Exemple 1 – Premières opérations

Déterminer les réels t_1 et t_2 tels que $3\,(t_2 + 1, t_1 + t_2) + (t_2 - t_1, 2 - t_2) = (2, 1)$.

□

3. Manipuler les éléments de $\mathbb{R}^3$

Définition 4 – Triplet d'éléments de $\mathbb{R}$ et ensemble $\mathbb{R}^3$

Soit $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \in \mathbb{R}$ et $x_3 \in \mathbb{R}$.
On notera (x_1, x_2, x_3) le **triplet** formé par les trois réels x_1, x_2 et x_3 et on dit aussi que (x_1, x_2, x_3) est un **3-uplet** d'éléments de $\mathbb{R}$.
On écrira alors $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Ensemble $\mathbb{R}^3$

On désignera par $\mathbb{R}^3$ l'ensemble des triplets de réels, c'est à dire : $\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3)\,,\ x_1 \in \mathbb{R} \text{ et } x_2 \in \mathbb{R} \text{ et } x_3 \in \mathbb{R}\}$
Les éléments de $\mathbb{R}^3$ sont appelés des **vecteurs**.

On adoptera l'écriture suivante : le **vecteur** x de $\mathbb{R}^3$ est le 3-uplet de réels $x = \underset{\textbf{où } x_1 \in \mathbb{R},\, x_2 \in \mathbb{R} \textbf{ et } x_3 \in \mathbb{R}}{(x_1, x_2, x_3)}$

Vecteur nul et égalité de vecteurs

Le triplet $(0, 0, 0)$ noté $\overrightarrow{0}$ est appelé le **vecteur nul** de l'ensemble $\mathbb{R}^3$.

$((x, y, z) = (0, 0, 0))$
$\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$

$((x, y, z) \neq (0, 0, 0)) \quad \Leftrightarrow$

que l'on retient en disant qu'au
au moins l'un des trois n'est pas nul

Sauf cas particulier on a notamment que $(x, y, z) \neq (y, x, z)$ ou que $(x, y, z) \neq (z, y, x)$.

$$\Big(\underset{\in\mathbb{R}^3}{(x, y, z)} = \underset{\in\mathbb{R}^3}{(x', y', z')}\Big) \Leftrightarrow (x = x' \text{ et } y = y' \text{ et } z = z') \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Opérations sur les éléments de $\mathbb{R}^3$ et structure vectorielle

Addition des vecteurs de $\mathbb{R}^2$

Pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

Multiplication par un scalaire

Pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda.x = (\lambda \times x_1, \lambda \times x_2, \lambda \times x_3)$$

Commutativité de l'addition

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \forall y \in \mathbb{R}^3, \quad x + y = y + x$$

Élément neutre de l'addition

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \quad x + \overrightarrow{0} = x$$

Ces deux opérations confèrent à $\mathbb{R}^3$ une structure dite d'espace vectoriel.

□

Application|[2941]| 1| Égalité dans $\mathbb{R}^3$

On désigne par $x = (1, -1, 1)$, $y = (2, -1, 1)$ et $z = (-1, 0, 1)$ trois éléments de $\mathbb{R}^3$.
Existe-t-il $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda.x + \mu.y = w$? Si oui, les déterminer.

□

Application|[2942]| 2| Somme d'élément de $\mathbb{R}^3$

Déterminer l'élément x de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$x = \sum_{k=1}^{5} \left((-1)^k \times k,\ k-1, k+(-1)^k\right)$$

□

4. Manipuler les éléments de $\mathbb{R}^n$

Définition 5 – $n-$uplet d'éléments de $\mathbb{R}$ et ensemble $\mathbb{R}^n$

Soit $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \in \mathbb{R}$, $\dots$, $x_n \in \mathbb{R}$.
On notera $(x_1, \dots, x_n)$ le $n-$**uplet** de réels formé par les n réels x_1, x_2,..., x_n. On écrira alors $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Ensemble $\mathbb{R}^n$

On désignera par $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des $n-$uplets de réels, c'est à dire :

$$\mathbb{R}^n = \left\{ (x_1, \dots, x_n),\ x_1 \in \mathbb{R} \text{ et } x_2 \in \mathbb{R} \text{ et } \dots \text{ et } x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

Les éléments de $\mathbb{R}^n$ sont appelés des **vecteurs**.
On adoptera l'écriture suivante : le **vecteur** x de $\mathbb{R}^n$ est le $n-$uplet de réels $x = \underset{\substack{\textbf{où } x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 \in \mathbb{R} \\ \dots \textbf{et } x_n \in \mathbb{R}}}{(x_1, \dots, x_n)}$

Vecteur nul et égalité de vecteurs

Le n-uplet $(0, \dots, 0)$ noté $\overrightarrow{0}$ est appelé le **vecteur nul** de l'ensemble $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} & ((x_1,\,\dots,\,x_n) = (0,\dots,0)) \\ \Leftrightarrow\; & (x_1 = 0 \text{ \underline{et} } x_2 = 0 \text{ \underline{et} } \dots \text{ \underline{et} } x_n = 0) \\ \Leftrightarrow\; & \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Big(\underbrace{(x_1,\,\dots,\,x_n)}_{\in\mathbb{R}^n} = \underbrace{(x'_1,\,\dots,\,x'_n)}_{\in\mathbb{R}^n}\Big) \\ \Leftrightarrow\; & (x_1 = x'_1 \text{ \underline{et} } x_2 = x'_2 \text{ \underline{et} } \dots \text{ \underline{et} } x_n = x'_n) \\ \Leftrightarrow\; & \begin{cases} x_1 = x'_1 \\ x_2 = x'_2 \\ \vdots \\ x_n = x'_n \end{cases} \end{aligned}$$

$(x_1,\,\dots,\,x_n) \neq (0,\dots,0) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{c}\text{au moins l'un des } n \text{ réels} \\ x_1,\, x_2,\dots,\, x_n \text{ n'est pas nul}\end{array}\right)$

Opérations sur les éléments de $\mathbb{R}^n$ et structure vectorielle

Addition des vecteurs de $\mathbb{R}^n$

Pour $x = (x_1,\,\dots,\,x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (x_1,\,\dots,\,x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

Multiplication par un scalaire

Pour $x = (x_1,\,\dots,\,x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda.x = (\lambda \times x_1, \lambda \times x_2, \dots, \lambda \times x_n)$$

Commutativité de l'addition

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall y \in \mathbb{R}^n, \quad x + y = y + x$$

Élément neutre de l'addition

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad x + \overrightarrow{0} = x$$

Ces deux opérations confèrent à $\mathbb{R}^n$ une structure dite d'espace vectoriel.

□

5. Combinaison linéaire d'éléments de $\mathbb{R}^n$ et sous-espace engendré par une famille

Définition 6 – Combinaison linéaire

Soit $\mathcal{F} = (u_1,\,\dots,\,u_p)$ une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

On dit que le vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ est lorsqu'il existe p **réels** $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, appelés aussi **scalaires** tels que :

Les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont appelés les .

Sens des notations

La famille $\mathcal{F} = (u_1,\,\dots,\,u_p)$ est constituée de p vecteurs $u_1,\, u_2, \dots, u_p$ tous éléments de $\mathbb{R}^n$.

Il s'agit donc d'un $p-$uplet d'éléments de $\mathbb{R}^n$.

$(u_1,\,\dots,\,u_p)$ est donc un élément du produit cartésien d'ensembles $\underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{p \text{ ensembles}} = (\mathbb{R}^n)^p$.

Dans la somme $\lambda_1.u_1 + \dots + \lambda_p.u_p$, il y a donc :

$$\begin{cases} \text{un } p\text{-uplet d'élements de } \mathbb{R} : & (\lambda_1,\,\dots,\,\lambda_p) \in \mathbb{R}^p \\ \text{un } p\text{-uplet d'élements de } \mathbb{R}^n : & (u_1,\,\dots,\,u_p) \in (\mathbb{R}^n)^p \end{cases}$$

□

Exemple 2 – Combinaison linéaire d'éléments de $\mathbb{R}^3$

Le vecteur $u = (1,1,1)$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $u_1 = (1,0,1)$, $u_2 = (1,-1,1)$ et $u_3 = (0,0,1)$? Si oui, déterminer les coefficients de la combinaison linéaire correspondante.

□

Définition 7 – Sous-espace engendré par une famille

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
L'**ensemble des combinaisons linéaires** des vecteurs de la famille $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ est :

Ce sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ est le **sous-espace vectoriel de** $\mathbb{R}^n$ **par la famille** $\mathcal{F}$ ou par $(u_1, \ldots, u_p)$.
On note aussi au lieu de .

Stabilité par combinaison linéaire

Si $x \in \text{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p)$, $y \in \text{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors .

□

Application| [2943] | 3| Décrire un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$

On considère le sous-ensemble $\mathbb{F}$ de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\mathbb{F} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x - y + z = 0\right\}$$

(1). Le vecteur $(-1,-1,-1)$ appartient-il à $\mathbb{F}$? et le vecteur $(1,1,1)$?

(2). Montrer que $\mathbb{F} = \text{Vect}\,((1,2,0)\,,(0,1,1))$.

(3). Déterminer alors deux réels λ_1 et λ_2 tels que :

$$(-1,-1,-1) = \lambda_1.(1,2,0) + \lambda_2.(0,1,1).$$

□

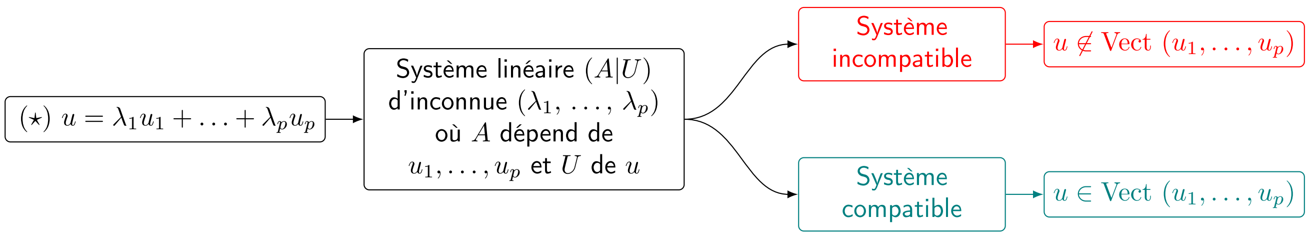
Point méthode 1 – Vérifier qu'un vecteur appartient à un sous-espace engendré par une famille

Étant donné une famille $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$:

(Le vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ appartient à $\text{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p)$)

$\Leftrightarrow$ (Il existe p réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que : $u = \lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2 + \ldots + \lambda_p.u_p \quad (\star)$)

La relation $(\star)$ se traduit alors par un **système linéaire** dont il suffit de $\boxed{\text{s'assurer de la compatibilité}}$.



□

Application | [2944] | 4 | Appartenance à un sous-espace engendré

On se place dans $\mathbb{R}^4$.
A-t-on $(-2, 1, -4, 7) \in \text{Vect}\,((2, 2, 1, 2), (1, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 2))$?

□

6 . Familles libres et liées de $\mathbb{R}^n$

Contexte

Dans tout ce paragraphe, sauf mention contraire, on désigne par $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

□

Définition 8 – Famille libre

La famille $\mathcal{F}$ est une **famille libre de** $\mathbb{R}^n$ lorsque :

$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p,$

Une famille qui est dite **liée**.

Interprétation

La famille $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ est **libre** lorsque avec une combinaison linéaire des p vecteurs $u_1, \ldots, u_p$ c'est de le faire à l'aide de la combinaison linéaire triviale .

Illustration | Une famille liée de $\mathbb{R}^3$

La famille $\mathcal{F} = ((0,1,2), (1,1,1), (1,2,3), (1,2,4))$ est une famille liée de $\mathbb{R}^3$ puisque :

$$-1.(0,1,2) - 1.(1,1,1) + 1.(1,2,3) + 0.(1,2,4) =$$

□

Point méthode 2 – Étude de la liberté d'une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$

Pour étudier la liberté d'une famille $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$:

- on suppose que l'on a une **combinaison linéaire nulle** de ces n vecteurs, c'est à dire que l'on a $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p = \overrightarrow{0}$ où $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$.
- on traduit cette combinaison linéaire sous forme d'un **système linéaire homogène** à n équations et p inconnues.
- on résout le **système que l'on sait être compatible** :
  - $\hookrightarrow$ si l'on trouve comme **seule solution** $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0$, alors la famille est **libre** ;
  - $\hookrightarrow$ sinon, la famille est liée.

$\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p = \overrightarrow{0}$ $(\star)$ → Système homogène $(A|0)$ d'inconnue $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$

→ Au moins un des λ_i est non nul → $\mathcal{F}$ est liée

→ $\left\{\begin{array}{lll} \lambda_1 & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_p & = & 0 \end{array}\right.$ → $\mathcal{F}$ est libre

□

Application | [2963] | 5| Étude de la liberté d'une famille

La famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ où $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_4)$ avec $u_1 = (1,1,1,1)$, $u_2 = (2,0,2,0)$, $u_3 = (-1,-1,0,0)$ et $u_4 = (0,0,1,0)$, est-elle une famille libre de $\mathbb{R}^4$?

□

7. Matrice d'une famille de vecteurs et applications

Définition 9 – Matrice d'une famille de vecteurs

On appelle **matrice de la famille** $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$, la matrice à n lignes et p colonnes dont les colonnes sont

□

Point méthode 3 – Obtenir la matrice d'une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$

La matrice A de la famille $\mathcal{F}$ de p vecteurs $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ s'obtient en écrivant en colonne les vecteurs $u_1, \ldots, u_p$.

Par exemple, la matrice de la famille $\mathcal{F} = \big(\underbrace{(1,-2,1)}_{u_1}, \underbrace{(4,7,3)}_{u_2}, \underbrace{(2,-1,2)}_{u_3}, \underbrace{(5,-3,2)}_{u_4}\big)$ est : $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 \\ -2 & 7 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

□

Exemple 3 – Matrice de familles de vecteurs

Donner la matrice de la famille $\mathcal{F} = ((1,1,0,1), (2,1,0,-1), (1,1,1,-1), (0,0,1,1), (2,1,0,1))$.

□

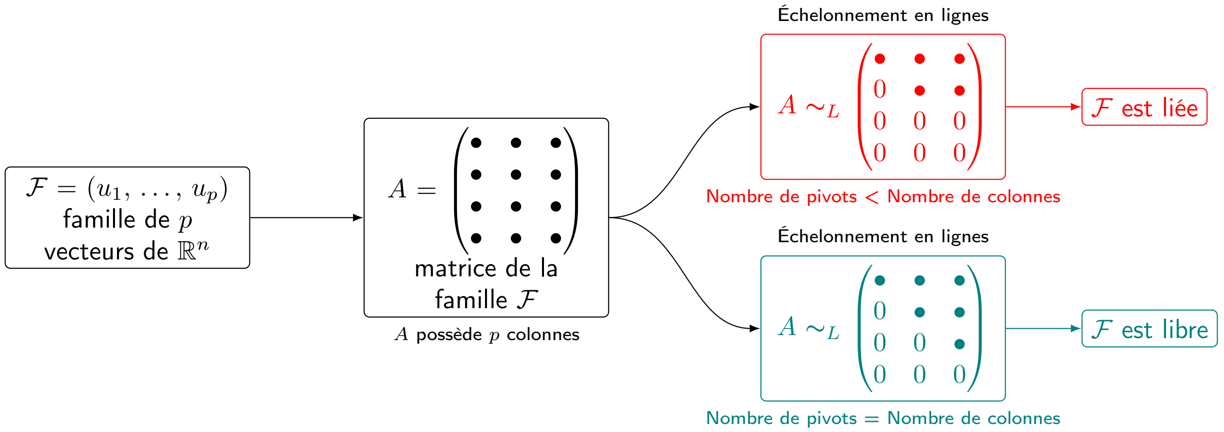
Théorème 1 – Liberté et système linéaire

On note A la matrice de la famille $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

On en déduit notamment que **lorsque la famille est libre, on a nécessairement** .

□

Point méthode 4 – Étudier la liberté d'un famille à l'aide de sa matrice



Illustration

La famille $\mathcal{F} = ((1,1,1),(1,2,3),(1,2,4))$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ est libre puisqu'un échelonnement en lignes

donne $A \sim_L$ et ainsi le système de matrice A est alors de , et comme $\mathcal{F}$ est une famille de

, on en déduit qu'elle est libre.

□

Par contre, la famille $\mathcal{G} = ((1,1,1),(1,2,3),(2,3,4))$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ n'est pas libre puisqu'un échelon-

nement en lignes donne $A \sim_L$ et ainsi le système de matrice A est alors de , ce qui ne convient pas

puisque $\mathcal{F}$ est une famille de .

Application|[2964]| 6| Liberté et représentation matricielle

On a écrit ci-dessous les matrices de familles de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Dans chaque cas, identifier p, n et les vecteurs $(u_1, \ldots, u_p)$ de $\mathcal{F}$, et dire s'il s'agit d'une famille libre ou non.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

□

8. Obtention de relations de dépendance

Théorème 2 – Taille maximale d'une famille libre de $\mathbb{R}^n$

Dans $\mathbb{R}^n$, toute famille vecteurs est liée.

□

Exemple 4 – Famille de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^3$

La famille $\mathcal{F} = ((1,1,1), (0,1,2), (1,2,3), (1,2,4))$ est une famille liée de $\mathbb{R}^3$ car

□

Proposition 1 – Relation de dépendance

On rappelle qu'une famille est liée lorsqu'elle n'est pas libre.

$$(\text{La famille } \mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p) \text{ est liée}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\exists k \in [\![1;p]\!], \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^{p-1}, \right)$$

Conséquence pour un sous-espace engendré par une famille

On remarquera que dans le cas d'une famille liée,

.

□

Exemple 5 – Espace engendré par une sous-famille d'une famille de vecteurs

La famille $\mathcal{F} = ((1,1,1), (0,1,2), (1,2,3), (1,2,4))$ est une famille liée de $\mathbb{R}^3$ et comme on a vu que

$$(0,1,2) = -1.(1,1,1) + 1.(1,2,3) + 0.(1,2,4)$$

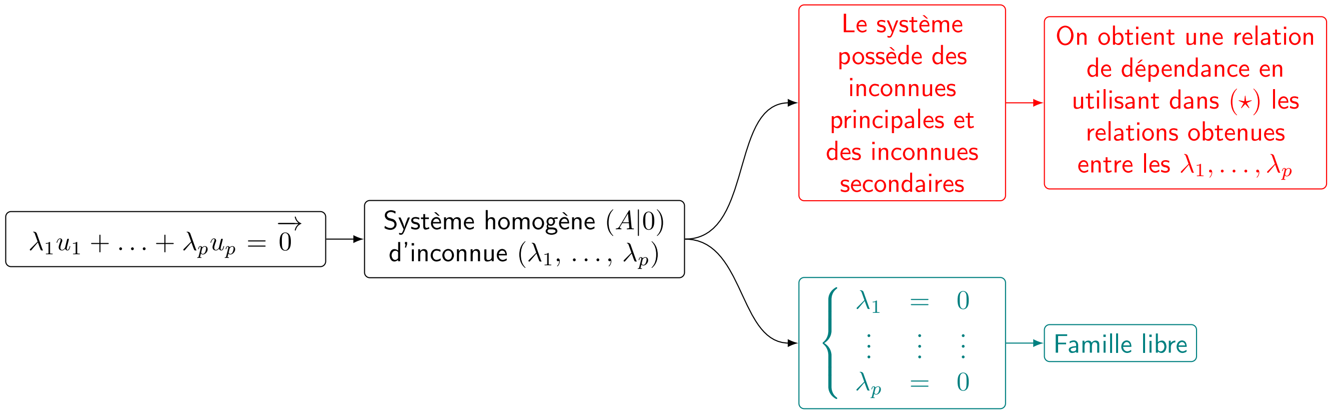
on en déduit que

□

Point méthode 5 – Obtenir une relation de dépendance

Pour trouver une relation de dépendance dans une famille $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$:

- on procède comme si l'on cherchait à montrer qu'elle est libre à partir d'une combinaison linéaire nulle des p vecteurs de $\mathcal{F}$: $(\star) : \lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2 + \ldots + \lambda_p.u_p = \overrightarrow{0}$.
- dès lors que l'on est assuré du caractère lié de la famille, la résolution du système ainsi écrit, donne des relations entre $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ que l'on écrit pour en déduire une relation entre les vecteurs $u_1, \ldots, u_p$.



□

Application| [2966] | 7| Relation de dépendance

Trouver une relation de dépendance entre les 4 vecteurs u_1, u_2, u_3 et u_4 de $\mathbb{R}^4$ où :

$$u_1 = (1,1,1,1),\ u_2 = (2,0,2,0),$$
$$u_3 = (-1,-1,0,0) \text{ et } u_4 = (0,-1,1,0).$$

□

9. Familles génératrices de $\mathbb{R}^n$

Définition 10 – Famille génératrice de $\mathbb{R}^n$

La famille $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ est dite **génératrice** de $\mathbb{R}^n$, et on écrit $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F}) = \mathbb{R}^n$ ou $\mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p) = \mathbb{R}^n$ lorsque

.

Cette définition se traduit par l'assertion :

□

Application| [2967] | 8| Famille génératrice de $\mathbb{R}^3$

Soient $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (1,-1,1)$, $u_3 = (-2,2,2)$ et $(u_4,-1,1) - 1$, quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
On note $w = (1,-2,2)$.

(1). Déterminer un quadruplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$\lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2 + \lambda_3.u_3 + \lambda_4.u_4 = w.$$

(2). La famille $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_4)$ est-elle une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$? Justifier votre réponse.

□

Théorème 3 – Famille génératrice de $\mathbb{R}^n$ et système linéaire

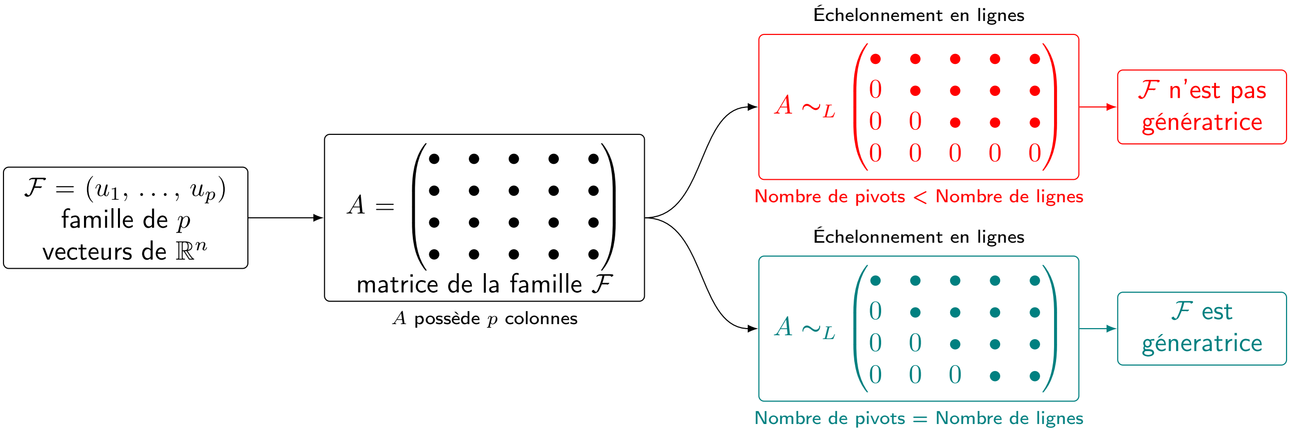
On note A la matrice de la famille $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

;

On en déduit que **lorsque la famille est génératrice, on a nécessairement** .

□

Point méthode 6 – Étudier le caractère générateur d'une famille à partir de sa matrice



□

Application| [2968] | 9| Caractère générateur et décomposition

La famille $\mathcal{F} = \left(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_5}\right)$ de 5 vecteurs de $\mathbb{R}^4$ où :

$$u_1 = (3, 1, -1, 1),\ u_2 = (1, 2, 1, 1),$$
$$u_3 = (1, -7, 4, -8),\ u_4 = (1, -1, 2, -2)$$
$$\text{et } u_5\ (2, 1, 0, 1)$$

est-elle une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$?
Si oui, écrire $w = (1, 1, 1, 1)$ comme combinaison linéaire de $(u_1, \ldots, u_5)$.

□

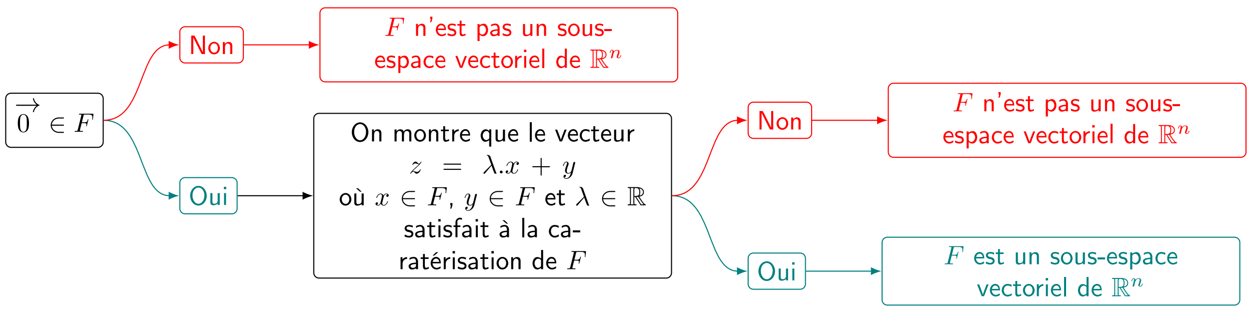
10 . Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

Définition 11 – Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

On dit qu'une partie F de $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ lorsque :

F contient le vecteur nul	F est stable par combinaison linéaire

Point méthode 7 – Montrer qu'une partie $F \subset \mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$



Exemple 6 – Sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

Montrer que $F = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & \alpha & + & \beta \\ y & = & -\alpha & - & 2\beta \\ z & = & 2\alpha & + & +3\beta \end{array} \right. \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Théorème 4 – Caractérisation des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

□

Exemple 7 – Écrire un sous-esemble de $\mathbb{R}^4$ sous forme d'un sous-espace engendré

?

Montrer que $F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ \begin{cases} t+x+y-z=0 \\ 2t+x-y-z=0 \end{cases}\right\}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$.

□

Définition 12 – Droites et plans vectoriels de $\mathbb{R}^n$

Droite vectorielle

Tout sous-espace F de $\mathbb{R}^n$ qui s'écrit où $e = (e_1, \ldots, e_n)$ non nul est appelé une .

Plan vectoriel

Tout sous-espace F de $\mathbb{R}^n$ qui s'écrit où $u = (u_1, \ldots, u_n)$ et $v = (v_1, \ldots, v_n)$ sont non nuls et non colinéaires est appelé un .

□

Théorème 5 – Classification des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$

Si F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$,
alors F est. . .

□