AL02

Échelonnement de systèmes linéaires

Version du 12-08-2022 à 11:46

1. Matrice échelonnée en lignes et échelonnée réduite en lignes

Définition 1 – Matrice échelonnée en lignes

Une matrice est dite **échelonnée en lignes** lorsque les deux conditions suivantes sont réalisées :

« Partie basse » de la matrice

$$\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si une **ligne** est **entièrement nulle**, alors

.

Forme « pseudo-triangulaire

$$\begin{pmatrix} {\color{red}\bullet} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & {\color{red}\bullet} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & {\color{red}\bullet} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {\color{red}\bullet} & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {\color{red}\bullet} & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {\color{red}\bullet} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans toute ligne non entièrement nulle à partir de la deuxième, le **premier coefficient non nul** à partir de la **gauche**

de la ligne précédente.

De tels coefficients sont appelés des .

□

Application| [2859] | 1| **Matrices échelonnées en lignes**

Quelles sont les matrices ci-dessous qui sont échelonnées en lignes ?

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□

Exemple 1 – Utilisation pour l'existence de solutions pour un système

Ces systèmes dont on donne la représentation matricielle admettent-ils des solutions ?

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Définition 2 – Matrice échelonnée réduite en lignes

On dira qu'une matrice est **échelonnée réduite en lignes** lorsqu'elle est échelonnée en lignes et que la **condition supplémentaire** suivante est réalisée :

Tous les **pivots** sont

.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \bullet & 0 & 0 & \bullet & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \bullet & 0 & 0 & \bullet & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \bullet & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \bullet & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Application| [2858] | 2| Matrices échelonnées réduites en ligne

Quelles sont les matrices ci-dessous qui sont échelonnées réduites en ligne ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition 3 – Système échelonné en lignes ou échelonné réduit en lignes

- Un système est alors dit **échelonné en lignes** quand , et non sa matrice augmentée, est .
- Un système est dit **échelonné réduit en lignes** quand , et non sa matrice augmentée, est .

Illustration

Matrice augmentée d'un système échelonné en lignes

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{2} & 3 & 4 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Matrice augmentée d'un système échelonné réduit en lignes

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

2. Algorithme du pivot de Gauss et échelonnement en lignes

Théorème 1 – Algorithme dit du « Pivot de Gauss »

L'algorithme du pivot de Gauss consiste en construire une suite d'opérations élémentaires sur les lignes, de sorte à transformer .

Toute matrice non nulle est donc ,
et on admettra que cette dernière est .

Application à la résolution de systèmes linéaires

Lorsque l'on résout un système à l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss, on fait opérer **sur la matrice augmentée** du système, les opérations nécessaires pour obtenir l'échelonnée puis éventuellement l'échellonnée réduite en lignes de la matrice du système.

□

Exemple 2 – Échelonnement en ligne puis réduit en ligne

On a fait opérer l'algorithme de Gauss sur la matrice augmentée d'un système $\mathcal{S}$ ci-dessous :

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 2 & -4 & -1 & -4 \\ -6 & 3 & 3 & -5 & 2 & -22 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & -2 & 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \\ L_5 \leftarrow L_5 - 1L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 2 & -4 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 9 & -17 & -1 & -34 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{3}L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + \frac{1}{3}L_2 \\ L_5 \leftarrow L_5 - \frac{1}{9}L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 2 & -4 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 9 & -17 & -1 & -34 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{11}{3} & -\frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{14}{3} & -\frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{62}{9} & \frac{19}{9} & \frac{43}{9} \end{array}\right) \underset{\substack{L_4 \leftarrow L_4 - 1L_3 \\ L_5 \leftarrow L_5 - \frac{62}{3}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 2 & -4 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 9 & -17 & -1 & -34 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{11}{3} & -\frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{221}{3} & \frac{221}{3} \end{array}\right)$$

$$\underset{L_5 \leftarrow L_5 + \frac{221}{3}L_4}{\sim_L} \boxed{\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{2} & -1 & 2 & -4 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & \boxed{9} & -17 & -1 & -34 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\frac{1}{3}} & \frac{11}{3} & -\frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)} \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{11}{3}L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 1L_4 \\ L_1 \leftarrow L_1 + 1L_4}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 2 & -4 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 9 & -17 & 0 & -35 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Matrice augmentée d'un système échelonné en lignes

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 51L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + 12L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{2}{9}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{9}L_2 \\ L_3 \leftarrow 3L_3}}{\sim_L} \boxed{\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}$$

Matrice augmentée d'un système échelonné réduit en lignes

□

3. Inconnues principales, secondaires et rang d'un système

Contexte

Dans tout ce paragraphe, et sauf mention contraire, on suppose que l'on dispose de la représentation matricielle notée $(A|B)$ d'un système linéaire $(\mathcal{S})$: $\underbrace{\left(\begin{array}{ccccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \diamond \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \diamond \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \diamond \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \diamond \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \diamond \end{array}\right)}_{\text{Matrice augmentée du système } (\mathcal{S})}$ $A = \underbrace{\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}}_{\text{Matrice du système } (\mathcal{S})}$ $B = \underbrace{\begin{pmatrix} \diamond \\ \diamond \\ \diamond \\ \diamond \\ \diamond \end{pmatrix}}_{\text{Second membre}}$

et que l'on a procédé à un **échelonnement en lignes** pour obtenir un système $(\mathcal{S}')$ équivalent en lignes de représentation matricielle notée $(A'|B')$: $\underbrace{\left(\begin{array}{ccccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \blacktriangledown \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \blacktriangledown \\ 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \blacktriangledown \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & \blacktriangledown \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacktriangledown \end{array}\right)}_{\text{Matrice augmentée du système } (\mathcal{S}')}$ $A' = \underbrace{\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Matrice du système } (\mathcal{S}')}$ $B' = \underbrace{\begin{pmatrix} \blacktriangledown \\ \blacktriangledown \\ \blacktriangledown \\ \blacktriangledown \\ \blacktriangledown \end{pmatrix}}_{\text{Second membre}}$

Vision d'ensemble

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \diamond \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \diamond \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \diamond \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \diamond \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \diamond \end{array}\right)}_{\text{Matrice augmentée du système } (\mathcal{S})} \sim_L \dots \sim_L \underbrace{\left(\begin{array}{ccccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \blacktriangledown \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \blacktriangledown \\ 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \blacktriangledown \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & \blacktriangledown \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacktriangledown \end{array}\right)}_{\text{Matrice augmentée du système } (\mathcal{S}')}$$

ou plus simplement : $(A|B) \sim_L \dots \sim_L (A'|B')$

□

Définition 4 – Inconnues secondaires, principales et rang d'un système

Les <u>inconnues</u> correspondant aux pivots de , matrice échelonnée en lignes de A, s'appellent les du système, les autres, s'appellent ou .

Rang d'un système

Le **rang** d'un système linéaire $(\mathcal{S})$, noté $\mathrm{rg}\,(\mathcal{S})$, est le de la matrice , autrement dit, le de $(\mathcal{S})$.

Illustration

On a procédé à un échelonnement réduit pour un système et on donne la matrice augementée obtenue ci-dessous.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Le rang du système vaut donc 4.

Les inconnues principales sont , alors que est une inconnue secondaire.

□

Théorème 2 – Indépendance du rang et lien avec le nombre d'inconnues

Le rang d'un système linéaire et donc du , et non de son second membre.

□

Définition 5 – Compatibilité d'un système

Les lignes nulles de correspondent à des équations de la forme ou à , que l'on appelle .

Illustration

La matrice augmentée de ce système échelonné en ligne conduit à deux équations de compatibilité :

- Sur L_5 à « 0=0 »
- Sur L_4 à « $0 = -1$ »

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

□

Théorème 3 – Existence de solution(s)

Système compatible

Un système linéaire ou , est dit compatible et il admet alors <u>au moins</u> une solution.

Système incompatible

Un est de la forme est alors dit incompatible et n'admet donc aucune solution.

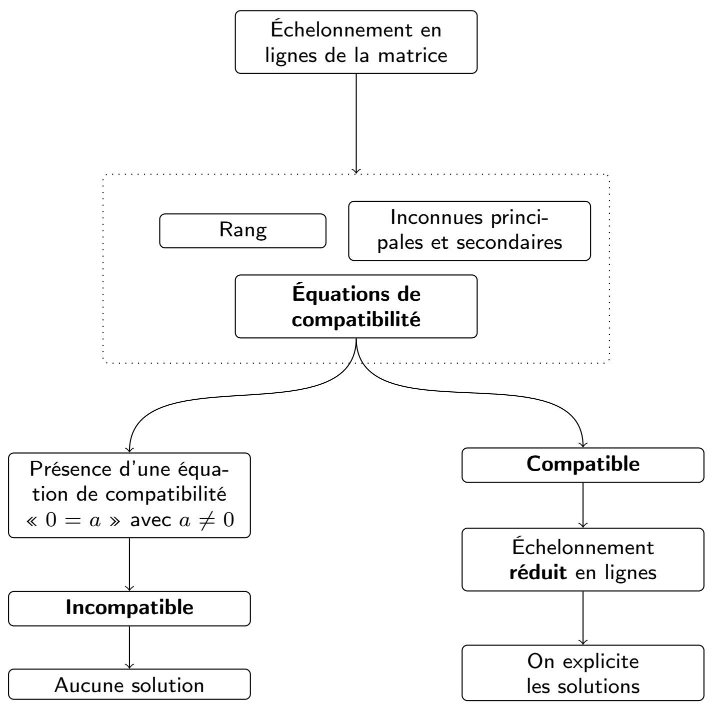
□

Théorème 4 – Solutions d'un système linéaire

Tout système linéaire à n équations et p inconnues admet :

- soit aucune solution ;
- soit une unique solution ;
- soit une infinité de solutions.

□



Proposition 1 – Compatibilité d'un système homogène $n \times p$

Tout système linéaire de taille $n \times p$

$$(\mathcal{S}_H) : \begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & \dots & + & a_{1p}x_p & = & \boxed{0} \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & \dots & + & a_{2p}x_p & = & \boxed{0} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & \dots & + & a_{np}x_p & = & \boxed{0} \end{cases}$$

est puisqu'il possède <u>au moins</u> la solution triviale comme solution.

□

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 0 \end{array}\right)$$

Matrice augmentée d'un système homogène($\mathcal{S}$)

Il y a toujours une solution :
la solution triviale $(0, 0, \dots, 0)$.

Proposition 2 – Compatibilité d'un système $n \times n$

Tout système linéaire de taille qui est de est et admet une .

On parle dans ce cas de **système de Cramer**.

□

Matrice augmentée d'un système $n \times n$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \diamond \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \diamond \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \diamond \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \diamond \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \diamond \end{array}\right)$$

Matrice échelonnée d'un système $n \times n$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \diamond \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \diamond \\ 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \diamond \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & \bullet & \diamond \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ? & \diamond \end{array}\right)$$

Système $n \times n$ de rang n

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \diamond \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \diamond \\ 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \diamond \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & \bullet & \diamond \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & \diamond \end{array}\right)$$

Si tous les pivots sont non nuls, alors le système $n \times n$ est de rang n et il admet alors une unique solution.

Application| [3677] | 3| Étude de la compatibilité d'un système

Pour chacun des systèmes dont on donne les matrices augmentées, déterminer le rang, les inconnues principales et secondaires, et son éventuelle compatibilité.

$$\mathcal{S}_1 : \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\mathcal{S}_2 : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\mathcal{S}_3 : \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\mathcal{S}_4 : \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\mathcal{S}_5 : \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\mathcal{S}_6 : \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 12 \end{array}\right)$$

□

4. Structure vectorielle des solutions d'un système homogène

Théorème 5 – Combinaison linéaire de solutions d'un système linéaire homogène

On considère $(\mathcal{S}_H)$ un système linéaire de représentation matricielle $(A|0)$.

Si $(g_1, \ldots, g_p)$ et $(h_1, \ldots, h_p)$ sont deux $p-$uplets solutions de $\mathcal{S}_H$, alors ...

Le $p-$uplet $(k_1, \ldots, k_p)$ obtenu par les relations :

est aussi solution de $\mathcal{S}_H$.

Le $p-$uplet $(k_1, \ldots, k_p)$ obtenu par les relations :

est aussi solution de $\mathcal{S}_H$.

Ainsi, de solutions d'un système linéaire est aussi solution de ce système linéaire homogène.

□

5. Ensemble des solutions d'un système compatible

Théorème 6 – Obtention des solutions d'un système compatible

On suppose que le système linéaire $(\mathcal{S})$ de représentation matricielle $(A|B)$ est et pour lequel on note $(\mathcal{S}_H)$: $(A|0)$ le système homogène associé.

Les équations associées aux inconnues principales permettent d'exprimer toutes les inconnues principales en fonctions des seconds membres et des inconnues secondaires.

Soit $\boxed{(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p}$ un de $\mathcal{S}$.

Tout $p-$uplet $(x_1, \ldots, x_p)$ solution de $\mathcal{S}$ peut s'écrire sous la forme :

où $(h_1, \ldots, h_p)$ est un $p-$uplet combinaison linéaire de $p-$uplets solutions de .

Décomposition d'une solution

On retiendra donc que :

□

Exemple 3 – Résolution complète d'un système linéaire

Pour déterminer l'ensemble des solutions du système $\mathcal{S}$ par sa matrice augmentée $\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -3 & 4 & 5 & 10 \\ -1 & 3 & -1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & -6 & 2 & -4 & -8 & -2 \\ 5 & 2 & 0 & 3 & -1 & 13 \end{array}\right)$, on commence par échelonner, par l'algorithme de Gauss, la matrice augmentée afin de déterminer le rang du système et son éventuelle compatibilité :

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -3 & 4 & 5 & 10 \\ -1 & 3 & -1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & -6 & 2 & -4 & -8 & -2 \\ 5 & 2 & 0 & 3 & -1 & 13 \end{array}\right) \quad \sim_L \quad \cdots \quad \sim_L \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -3 & 4 & 5 & 10 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & 4 & \frac{13}{2} & 6 \\ 0 & 0 & \frac{50}{7} & -\frac{45}{7} & -\frac{88}{7} & -\frac{78}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Il y a 3 pivots non nuls. Le rang du système est donc 3 et le système présente une équation de compatibilité :

$$\left\{\ 0 = 0 \qquad \text{Relation vérifiée}\right.$$

On remarque notamment que sont les inconnues principales, sont quant à elles les inconnues secondaires.
Le système est compatible et on poursuit l'échelonnement :

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -3 & 4 & 5 & 10 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & 4 & \frac{13}{2} & 6 \\ 0 & 0 & \frac{50}{7} & -\frac{45}{7} & -\frac{88}{7} & -\frac{78}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim_L \cdots \sim_L \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{11}{25} & \frac{59}{25} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{10} & -\frac{44}{25} & -\frac{39}{25} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

En notant x_1, …, x_5 les inconnues du système, on en déduit que **les solutions de** $\mathcal{S}$ sont les 5-uplets $(x_1, \dots, x_5)$ où :

où $(x_4, x_5) \in \mathbb{R}^2$.

On peut écrire ces relations ainsi : où $(x_4, x_5) \in \mathbb{R}^2$

et qui permettront de voir que est une solution particulière de $\mathcal{S}$, alors que et sont deux solutions de $\mathcal{S}_H$, où l'on verra plus tard, qu'elles forment une base des solutions du système $\mathcal{S}_H$.

□

Application| [2858] **| 4| Résolution de systèmes linéaires**

Terminer, lorsque le système est compatible, la résolution des systèmes de l'application n° 5 en explicitant toutes les solutions.

□