AL01

Représentation matricielle des systèmes linéaires

Version du 11-08-2022 à 17:10

Contexte

L'objet de ce chapitre est de développer des outils calculatoires « performants » pour résoudre des systèmes linéaires tels ou et bien évidemment de tailles « supérieures » ou « rectangulaires ».

1. Résolution de systèmes linéaires 2×2

Introduction – Résolution par combinaison

? Déterminer **par combinaison** tous les couples de réels (x, y) du système $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases}$.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 & L_1 \\ 3x - 4y = 2 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

? De quoi peut-on se passer pour résoudre ce système et « alléger » le traitement de sa résolution ?

Définition 1 – Représentation matricielle d'un système linéaire 2×2

On associe au système linéaire $(\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x + a_{12}y & = & b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y & = & b_2 \end{array} \right.$ d'inconnues le couple de réels (x, y) le tableau de nombres

que l'on appelle alors représentation matricielle du système $(\mathcal{S})$.

Terminologie supplémentaire

Le tableau de nombres est appelé matrice du sytème $(\mathcal{S})$.

On parle aussi de **matrice augmentée** pour désigner la représentation matricielle du système $(\mathcal{S})$.

Ilustration

La représentation matricielle du système $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases}$ est .

□

Exemple 1 – Écriture de représentation matricielle et de systèmes linéaires 2×2

Écrire le système $(\mathcal{S})$ d'inconnues le couple de réels (u, v) de représentation matricielle $\left(\begin{array}{cc|c} -2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{array} \right)$.

□

Exemple 2 – Résolution d'un système linéaire 2×2 à l'aide de sa représentation matricielle

Déterminer tous les couples de réels (x, y) tels que $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases}$.

La représentation matricielle du système $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases}$ est

□

2. Résolution de systèmes linéaires 3×3

Définition 2 – Représentation matricielle d'un système linéaire 3×3

On associe au système linéaire $(\mathcal{S})$: $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z & = & b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z & = & b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z & = & b_3 \end{cases}$ d'inconnues le triplet de réels (x, y, z) le tableau de nombres que l'on appelle alors représentation matricielle du système $(\mathcal{S})$.

Le tableau de nombres est appelé matrice du sytème $(\mathcal{S})$, et on parle aussi de **matrice augmentée** pour désigner la représentation matricielle du système $(\mathcal{S})$.

Ilustration

La représentation matricielle du système $\begin{cases} x - \ \ y + 2z = 5 \\ 2x + \ \ y - \ \ z = -1 \\ x - 2y + \ \ z = 6 \end{cases}$ est .

□

Exemple 3 – Écriture de représentation matricielle et de systèmes linéaires 3×3

Écrire le système $(\mathcal{S})$ d'inconnues le triplet de réels (α, β, γ) de représentation matricielle $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$.

□

Exemple 4 – Résolution par combinaison

Déterminer **par combinaison** et à l'aide de sa représentation matricielle tous les triplets de réels (x, y, z) solutions du système $\begin{cases} x - \ \ y + 2z = 5 \\ 2x + \ \ y - \ \ z = -1 \\ x - 2y + \ \ z = 6 \end{cases}$.

□

3. Premiers systèmes rectangulaires

Introduction – Conditions supplémentaires

Les systèmes $(\mathcal{S}_1) : \begin{cases} 2x+3y=4 & L_1 \\ 3x-4y=2 & L_2 \\ 2x-\ y=2 & L_3 \end{cases}$ et $(\mathcal{S}_2) : \begin{cases} 2x+\ 3y=4 & L_1 \\ 3x-\ 4y=2 & L_2 \\ x+10y=6 & L_3 \end{cases}$ admettent-il des solutions ?

Dans les deux cas l'équation portée par la ligne L_3 sur le couple (x, y).

Comme première idée, on peut s'intéresser au sous-système formé par les deux premières équations et s'assurer que le couple (x, y) trouvé satisfait l'équation de la ligne L_3.

$(\mathcal{S}_1) : \begin{cases} 2x+3y=4 & L_1 \\ 3x-4y=2 & L_2 \\ 2x-\ y=2 & L_3 \end{cases}$ a pour représentation matricielle . On résout par combinaison le système formé par les deux premières lignes pour obtenir : qui signifie que nécessairement $x =$ et $y =$ **mais surtout** que l'on doit avoir pour satisfaire L_3, ce qui n'est pas le cas et le système $(\mathcal{S}_1)$.

$(\mathcal{S}_2) : \begin{cases} 2x+\ 3y=4 & L_1 \\ 3x-\ 4y=2 & L_2 \\ x+10y=6 & L_3 \end{cases}$ a pour représentation matricielle . On résout par combinaison le système formé par les deux premières lignes pour obtenir : qui signife que nécessairement et **mais surtout** que l'on doit avoir pour satisfaire L_3, ce qui le cas ici, et le système $(\mathcal{S}_2)$.

Pourrait-on résoudre un tel système sans avoir à procéder à la fin à une vérification de nos solutions dans la dernière équation ?

La réponse est oui, et par la suite, on évitera de procéder comme on vient de l'évoquer.

□

Exemple 5 – Vers les équations de compatibilité

Montrer que $(\mathcal{S}_1) : \begin{cases} 3x-2y=1 \\ 2x-\ y=1 \\ x-\ y=0 \end{cases}$ admet une unique solution mais que $(\mathcal{S}_2) : \begin{cases} 3x-2y=1 \\ 2x-\ y=1 \\ x+\ y=0 \end{cases}$ n'en admet pas.

Introduction – Trop d'inconnues

? Quelles sont les solutions du système $(\mathcal{S})$: $\begin{cases} x - y + 2z + t = 5 & L_1 \\ 2x + y - z - t = -1 & L_2 \\ x - 2y + z + 2t = 6 & L_3 \end{cases}$?

On ne dispose que de trois équations pour déterminer quatre inconnues.

On pourrait exprimer trois des quatre inconnues à l'aide de la quatrième, par exemple ici exprimer x, y et z en fonction de t.

On pourrait écrire $(\mathcal{S})$: $\begin{cases} x - y + 2z + t = 5 & L_1 \\ 2x + y - z - t = -1 & L_2 \\ x - 2y + z + 2t = 6 & L_3 \end{cases}$ sous la forme et travailler avec sa représentation matricielle pour obtenir après résolution par combinaison

que l'on traduit par .

On voit donc qu'un tel système conduit à une infinité de solutions qui seront tous les quadriplets (x, y, z, t) de la forme avec t décrivant tout $\mathbb{R}$.

? Est-ce que cela « marche tout le temps » et quelle(s) inconnue(s) exprimer en fonction de quelle(s) autre(s) ? Pourrait-on résoudre un tel système sans avoir à faire un tel choix « hasardeux » au départ ?

La réponse est oui, et par la suite, on évitera de procéder comme on vient de l'évoquer.

□

Exemple 6 – Résolution d'un système 2×3

? Déterminer les solutions du système $(\mathcal{S})$: $\begin{cases} 3x - 2y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = 1 \end{cases}$.

□

4. Systèmes linéaires de taille $n \times p$ et représentation matricielle

Définition 3 – Système de taille $n \times p$

On appelle système à n équations d'inconnues le $p-$uplet de réels $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ tout système $(\mathcal{S})$ de la forme

$$(\mathcal{S}) : \left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \ldots & + & a_{np}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

où les $n \times p$ coefficients $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et les n seconds membres $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont tous supposés réels.

On associe alors à ce système le tableau de nombres $\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{np} & b_n \end{array}\right)$ appelée **représentation matricielle** ou **matrice augmentée** du système $(\mathcal{S})$.

Résoudre le système $(\mathcal{S})$, c'est déterminer .

Système homogène

Lorsque tous les seconds membres d'un système linéaire $(\mathcal{S})$ tel que défini plus haut sont nuls, on parle de .

$$(\mathcal{S}) : \left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1p}x_p & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2p}x_p & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \ldots & + & a_{np}x_p & = & 0 \end{array}\right.$$

Représentation matricielle d'un système homogène

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{np} & 0 \end{array}\right)$$

□

Exemple 7 – Représentation matricielle d'un système

?

Écrire la matrice augmentée des systèmes linéaires $(\mathcal{S}_1) : \left\{\begin{array}{l} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -1 \end{array}\right.$ et $(\mathcal{S}_2) : \left\{\begin{array}{l} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 9 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{array}\right.$, et écrire le système de représentation matricielle $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right)$ d'inconnues le quadruplet de réels (x, y, z, t).

□

5. Opérations élementaires sur les lignes d'une matrice et incidence pour le système

Définition 4 – Opérations sur les lignes

On considère un système linéaire $(\mathcal{S})$, homogène ou non, sa matrice et sa matrice augmentée.
On peut **procéder sur ces 3 objets** aux différentes opérations élémentaires sur les lignes décrites ci-dessous :

On peut échanger deux lignes L_i et L_j avec $i \neq j$, opération notée .	L'opération $L_1 \leftrightarrow L_2$ sur la matrice augmentée $\left(\begin{array}{ccc\|c} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & 6 & -9 \end{array}\right)$ amène à la matrice augmentée .
On peut multiplier une ligne L_i par une constante $\lambda \neq 0$, opération notée .	L'opération $L_3 \leftarrow -\frac{1}{3}L_3$ sur la matrice augmentée $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ -3 & 6 & 6 & -9 \end{array}\right)$ amène à la matrice augmentée .
On peut ajouter à la ligne L_i la ligne λL_j pour $i \neq j$, opération notée .	L'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ sur la matrice augmentée $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \end{array}\right)$ amène à la matrice augmentée et si l'on exécute l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ sur cette dernière on obtient la matrice augmentée .

Chacune de ces opérations est **inversible**, au sens où l'on peut revenir en arrière à l'aide d'une autre opération élémentaire.

Systèmes et matrices équivalents en ligne

On dit que deux systèmes $(\mathcal{S}_1)$ et $(\mathcal{S}_2)$ sont si on passe de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes et on notera alors .

On adopte la même terminologie pour deux matrices A_1 et A_2 où l'on notera , la terminologie portant ici sur une matrice et non pas une matrice augmentée.

□

Théorème 1 – Ensemble des solutions de deux systèmes équivalents en ligne

Deux systèmes équivalents en ligne ont .

□

Exemple 8 – Lecture des solutions sur une matrice augmentée

On a fait opérer sur les matrices augmentées de plusieurs systèmes, une succession d'opérations élémentaires pour obtenir les matrices augmentées ci-dessous. Identifier celles pour lesquelles on peut **directement** donner les solutions au système associé ou celles pour lesquelles on est certain qu'ils n'ont pas de solutions.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Quelle « forme » de matrice augmentée sont les plus adaptées pour répondre à la question posée ?

□

Point méthode 1 – Le point sur l'algorithme de Gauss et la représentation matricielle d'un sytème

Faire opérer l'algorithme de Gauss sur un système ou une matrice augmentée consiste à réaliser de sorte à obtenir un système équivalent en lignes, donc de même(s) solution(s), dont la « forme » permet d'obtenir facilement les solutions.

Forme initiale	Forme intermédiaire	Forme terminale
$\left(\begin{array}{ccc\|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}\right)$		

Il s'agit donc de réaliser une résolution par combinaison de lignes.

Étape 0	Étape 1
$\left(\begin{array}{ccc\|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{ccc\|c} \color{red}{\bullet} & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}\right)$ On utilise le coefficient $\color{red}{\bullet}$ tous les coefficients de la première colonne situés .

Étape 2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & {\color{blue}\bullet} & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet & \bullet \end{array}\right)$$

On utilise le coefficient ${\color{blue}\bullet}$ tous les coefficients de la deuxième colonne situés .

Étape 3 et suivantes

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & {\color{green}\bullet} & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \bullet \end{array}\right)$$

On utilise le coefficient ${\color{green}\bullet}$ tous les coefficients de la première colonne situés .

Étape 4 - On fait le point

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & ? \end{array}\right)$$

On analyse les dernières lignes du système pour déterminer si le système peut ou non avoir des solutions.

Étape 5

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bullet & \bullet & 0 & \bullet \\ 0 & \bullet & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & {\color{green}\bullet} & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On utilise le coefficient ${\color{green}\bullet}$ tous les coefficients de la première colonne situés .

Étape 6 et suivantes

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bullet & 0 & 0 & \bullet \\ 0 & {\color{blue}\bullet} & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On utilise le coefficient ${\color{blue}\bullet}$ tous les coefficients de la première colonne situés .

Étape 7 et finale

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 1 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 1 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

À l'aide des opérations élémentaires idoines, on transforme de sorte qu'ils soient pour pouvoir lire les solutions.

La forme et la taille du système d'origine conditionne bien évidemment les discussions que l'on peut avoir sur l'existence ou non de solutions.

Illustration pour un système 3×3 avec solution unique

Losque l'on résout par l'algorithme de Gauss un système linéaire, la matrice du système « subit » une succession de « changement de forme » :

$$\underset{\text{Forme « carrée »}}{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 6 \end{array}\right)} \underset{\cdots}{\sim_L} \cdots \underset{\cdots}{\Leftrightarrow} \underset{\text{Forme « triangulaire supérieure »}}{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -5 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)} \underset{\cdots}{\sim_L} \cdots \underset{\cdots}{\Leftrightarrow} \underset{\text{Forme « diagonale »}}{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)}$$

□

Exemple 9 – Résolution d'un système linéaire 3×3 à l'aide de sa matrice augmentée

La matrice augmentée du système $\mathcal{S}$: $\left\{\begin{array}{rl} x - y + 2z &= 5 \\ 2x + y - z &= -1 \\ x - 2y + z &= 6 \end{array}\right.$ est $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 6 \end{array}\right)$ où l'applique l'algorithme de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 6 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -5 & -11 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{3}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -5 & -11 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} & -\frac{8}{3} \end{array}\right)$$

On fait opérer l'algorithme de Gauss de sorte à obtenir une matrice « triangulaire supérieure »

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{15}{\frac{8}{3}}L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + \frac{3}{4}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} & -\frac{8}{3} \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{3}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} & -\frac{8}{3} \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{3}{8}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

On poursuit l'algorithme de Gauss de sorte à obtenir une matrice « pseudo-diagonale »

On en déduit donc que : et ainsi, on a $\mathrm{Sol}_{\mathcal{S}} =$.

□

Application|[3675]| 1| Système linéaire et représentation matricielle

Résoudre les systèmes d'inconnues x, y et z dont les matrices augmentées sont :

$$\mathcal{S}_1 : \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & -14 \\ 2 & -2 & 2 & -12 \\ -1 & 3 & -2 & 11 \end{array}\right) \quad \mathcal{S}_2 : \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -3 & -3 \\ 2 & -3 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

□

Application|[3676]| 2| Système linéaire de taille 4×4

Pour chacun des deux systèmes suivants, écrire la matrice augmentée du système, puis le résoudre :

$$\mathcal{S}_1 : \begin{cases} x + 2y - 3z + 4t = -11 \\ -2x - y + z + 2t = -6 \\ y + 2z + 4t = -7 \\ 2x + z + 3t = -1 \end{cases} \quad \mathcal{S}_2 : \begin{cases} -x + 3y - 3z + 4t = -2 \\ -2x + y + 2z + 2t = 5 \\ -x + y + 2z + 2t = 6 \\ 2x - 2y + z + 2t = 10 \end{cases}$$

□