AL18

Supplémentaire orthogonal et projection orthogonale

Version du 27-01-2023 à 08:30

1 . Supplémentaire orthogonal

Théorème 1 – Supplémentaire orthogonal dans $\mathbb{R}^n$

Si F est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$, alors on a : $\quad \mathbb{R}^n = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$

On en déduit notamment que : $\quad \dim\left(F^\perp\right) = n - \dim(F) \quad$ et $\quad F = \left(F^\perp\right)^\perp$

□

Éléments de preuve:

- Par théorème, F admet une base orthonormée. Effet, si $f_1 \in F$ est un vecteur de norme 1, il forme à lui seul une famille orthonormée de F, que l'on peut compléter en une base orthonormée $\mathcal{B}_F = (f_1, \ldots, f_p)$ de F.
  Cette famille $\mathcal{B}_F$ étant elle-même orthonormée, il existe une famille $(f_{p+1}, \ldots, f_n)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ telle que $\mathcal{B} = (f_1, \ldots, f_p, f_{p+1}, \ldots, f_n)$ est orthonormée.
  Montrons que $F^\perp = \mathrm{Vect}\,(f_{p+1}, \ldots, f_n)$.
  Soit alors $x \in \mathbb{R}^n$. Puisque $(f_1, \ldots, f_p)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, on a $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x \,|\, f_i \rangle\, f_i$.
  Or on a : $\quad \left(x \in F^\perp\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\forall i \in [\![1;p]\!]\ \langle x \,|\, f_i \rangle = 0\right)$
  Ainsi, il vient : $\quad \left(x \in F^\perp\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(x = \sum_{i=p+1}^{n} x_i f_i\right)$
  Par conséquent, on a bien $F^\perp = \mathrm{Vect}\,(f_{p+1}, \ldots, f_n)$.
  D'après le théorème de concaténation des bases, on en déduit que les deux sous-espaces $\mathrm{Vect}\,(f_1, \ldots, f_p) = F$ et $\mathrm{Vect}\,(f_{p+1}, \ldots, f_n) = F^\perp$ sont supplémentaires.
- Puisque F et $F^\perp$ sont supplémentaires, on a $n = \dim(F) + \dim\left(F^\perp\right)$ ce qui donne $\dim\left(F^\perp\right) = n - \dim(F)$.
- En appliquant le résultat précédent à $F^\perp$, on a :$\dim\left(\left(F^\perp\right)^\perp\right) = n - \underbrace{\dim\left(F^\perp\right)}_{=n-\dim(F)}$. Ainsi, on a $\dim\left(\left(F^\perp\right)^\perp\right) = \dim(F)$, ce qui assure que $\left(F^\perp\right)^\perp = F$ puisque l'on sait déjà que $F \subset \left(F^\perp\right)^\perp$.

Définition 1 – Hyperplans de $\mathbb{R}^n$

On appelle hyperplan de $\mathbb{R}^n$ tout sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ qui est de dimension $n-1$.

□

Exemple 1 – Hyperplans de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$

- Dans $\mathbb{R}^2$ toute droite vectorielle est un hyperplan de $\mathbb{R}^2$.
- Dans $\mathbb{R}^3$ tout plan vectoriel est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.

□

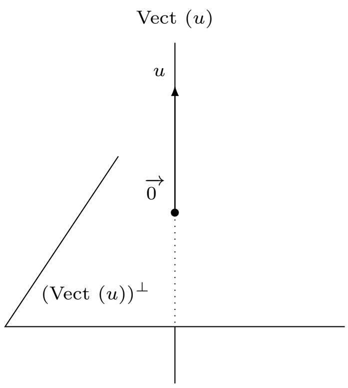
Proposition 1 – Vecteurs orthogonaux à des hyperplans

Orthogonal d'une droite vectorielle

Si $u \in \mathbb{R}^n$ est non nul,
alors $(\mathrm{Vect}\ (u))^{\perp}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$.

On a même : $\mathrm{Vect}\ (u) \overset{\perp}{\oplus} (\mathrm{Vect}\ (u))^{\perp} = \mathbb{R}^n$

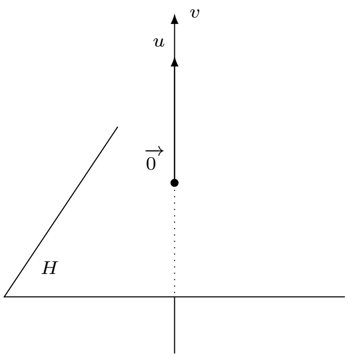
Illustration



Vecteurs orthogonaux à un même hyperplan

Si $u \in \mathbb{R}^n$ et $v \in \mathbb{R}^n$ sont orthogonaux au même hyperplan H de $\mathbb{R}^n$,
alors u et v sont colinéaires.

Illustration



□

2. Projection orthogonale sur un sous-espace

Définition 2 – Projection orthogonale sur un sous-espace

Soit F un sous-espace de dimension finie de $\mathbb{R}^n$.
Puisque $\mathbb{R}^n = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$ on peut définir le projecteur sur F de direction $F^{\perp}$ noté p_F :

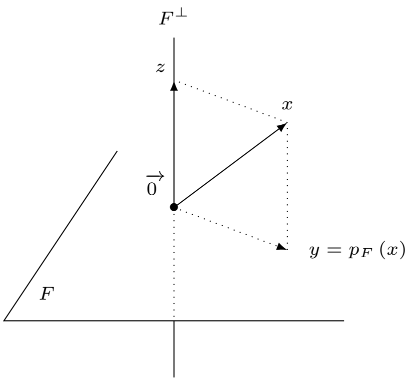
$$p_F : \left| \begin{array}{ccc} E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp} & \longrightarrow & E \\ x = y + z & \longmapsto & p_F\,(x) = y \end{array} \right.$$

On dit alors que p_F est la projection orthogonale sur F [a] et $y = p_F\,(x)$ est appelé le projeté orthogonal de x sur F.

Définition difficile à utiliser pour dans la pratique déterminer $p_F(x)$.

□

a. on ne précise plus la direction puisqu'elle est orthogonale à F car donnée par $F^{\perp}$.



Théorème 2 – Expression du projeté dans une base orthonormée du sous-espace

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B}_F = (f_1, \ldots, f_p)$ est une base orthonormée de F [a]

En notant p_F la projection orthogonale sur F, on a : $\forall x \in E, \quad p_F\,(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \langle x \,|\, f_k \rangle\, f_k$

Résultat difficile à utiliser dans la pratique car il faut disposer de $(f_1, \ldots, f_p)$.

□

a. Ainsi, F est nécessairement un sous-espace de dimension finie p de E.

Éléments de preuve:

Compte-tenu de la définition de p_F, il suffit de montrer que $y = x - \sum_{k=1}^{p} \langle x \,|\, f_k \rangle\, f_k \in F^{\perp}$.

Cela revient à montrer que : $\forall i \in [\![1;p]\!]\,,\ \langle y \,|\, f_i \rangle = 0.$

Exemple 2 – Projeté orthogonal d'un vecteur de $\mathbb{R}^3$ sur un plan vectoriel

Déterminer le projeté orthogonal de $u = (1,1,1)$ sur $F = \mathrm{Vect}\left((1,1,0), (1,-1,1)\right)$.

On remarque que $\mathcal{B} = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$ est une base orthonormée de F. On a alors que :

$$
\begin{aligned}
p_F(u) &= \left\langle (1,1,1) \,\middle|\, \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \right\rangle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) + \left\langle (1,1,1) \,\middle|\, \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right\rangle \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\
&= \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)
\end{aligned}
$$

□

Théorème 3 – Propriétés « géométriques » d'une projection orthogonale

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Invariants par p_F

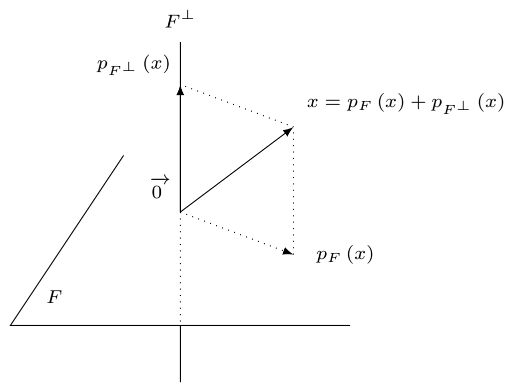
$$\forall x \in E, \quad (x \in F) \quad \Leftrightarrow \quad (p_F(x) = x)$$

Lien entre p_F, F et $F^{\perp}$

$$\forall x \in E, \quad \begin{cases} p_F(x) & \in \quad F \\ x - p_F(x) & \in \quad F^{\perp} \end{cases}$$

Lien entre p_F et $p_{F^{\perp}}$

$$\forall x \in E, \quad x = p_F(x) + p_{F^{\perp}}(x)$$



□

Point méthode 1 – Obtenir le projeté orthogonal d'un vecteur sur un sous-espace

Pour obtenir le projeté orthogonal d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ sur un sous-espace F de $\mathbb{R}^n$, on pourra utiliser une base $\mathcal{B}$ quelconque de F.

On sait que $p_F(x)$ se décompose sur la base $\mathcal{B}$ et on doit avoir $x - p_F(x) \in F^{\perp}$.

C'est à dire que $x - p_F(x)$ est orthogonal à tous les vecteurs de $\mathcal{B}$ ce qui permet d'en déterminer les coordonnées sur cette base.

□

Application|[4729]| 1| Projection sur un sous-espace de $\mathbb{R}^4$

Soit $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x+y+z+t=0\}$.

(1). Déterminer le projeté orthogonal de $u = (1,2,1,2)$ sur F.

(2). Faire de même pour $v = (1,1,1,1)$.

□

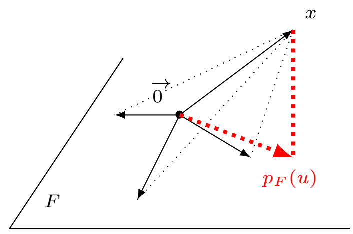
3. Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$

Définition 3 – Distance à un sous-espace

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$. On appelle distance de x à F noté $\mathrm{d}(x, F)$ le réel :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(x, F) &= \inf_{f \in F} \mathrm{d}(x, f) \\ &= \inf_{f \in F} \|x - f\| \end{aligned}$$

□



Théorème 4 – Distance à un sous-espace et projeté orthogonal

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Pour tout $x \in E$: $\quad \begin{aligned} \mathrm{d}(x, F) &= \mathrm{d}(x, p_F(x)) \\ &= \|x - p_F(x)\| \end{aligned}$

où p_F désigne la projection orthogonale sur F.

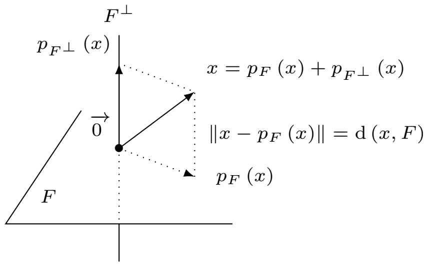
De plus, $p_F(x)$ est l'unique vecteur f de F qui vérifie :

$$\mathrm{d}(x, F) = \mathrm{d}(x, f)$$

ce qui signifie que $p_F(x)$ est l'unique élément de F qui minimise $\|x - f\|$ avec $f \in F$.

□

Éléments de preuve:



Soit $f \in F$. Puisque $p_F(x) - f \in F$ et $x - p_F(x) \in F^{\perp}$, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\begin{aligned} \|x - f\|^2 &= \|x - p_F(x) + p_F(x) - f\|^2 \\ &= \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - f\|^2 \end{aligned}$$

Donc pour tout $f \in F$, $\|x - f\|^2 \geq \|x - p_F(x)\|^2$ et ainsi $\|x - f\| \geq \|x - p_F(x)\|$.

Comme $p_F(x) \in F$, le minimum de $\|x - f\|$ est bien $\|x - p_F(x)\|$.

De plus pour $f \neq x$, on a $\|p_F(x) - f\| \neq 0$ donc $\|x - f\| > \|x - p_F(x)\|$.

Ainsi, $p_F(x)$ est bien l'unique élément de F qui minimise $\|x - f\|$.

Théorème 5 – Clin d'oeil au théorème de Pythagore

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. $\quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2$

□

Application| [4730] | 2| Distance à un sous-espace de $\mathbb{R}^4$

Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z + t = 0\}$.
Déterminer la distance de $u = (1, 2, 1, 2)$ à F.

□