AL17

Bases orthonormées de $\mathbb{R}^n$

Version du 27-01-2023 à 08:27

Contexte

Dans tout ce qui suit, sauf mention contraire, n désignera un entier naturel non nul.
On rappelle que la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est la famille des n vecteurs $(e_1, \ldots, e_n)$ où :

$$\forall i \in [\![1;n]\!],\ e_i = (0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i^{\text{e}} \\ \text{place}}}{1}, 0, \ldots, 0)$$

☐

1 . Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée

Définition 1

On dit que la famille $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ lorsque $\mathcal{B}$ est une base et que $\mathcal{B}$ est une famille orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

☐

Théorème 1 – Orthonormalité de la base canonique de $\mathbb{R}^n$

La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

☐

Éléments de preuve:
Il est immédiat que : $\forall i \in [\![1;n]\!],\ \|e_i\|^2 = 0^2 + \ldots + 0^2 + \underset{\substack{\uparrow \\ i^{\text{e}} \\ \text{place}}}{1^2} + 0^2 + \ldots + 0^2$ d'où $\|e_i\| = 1$.

Par ailleurs : $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;n]\!],\ i \neq j,$

$$\begin{aligned} \langle e_i | e_j \rangle &= 0 \times 0 + \ldots + 0 + \underset{\substack{\uparrow \\ i^{\text{e}} \\ \text{place}}}{1} \times 0 + 0 + \ldots + 0 + 0 \times \underset{\substack{\uparrow \\ j^{\text{e}} \\ \text{place}}}{1} + 0 + \ldots + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Théorème 2 – Décomposition d'un vecteur sur une base orthonormée

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée quelconque de $\mathbb{R}^n$ et $u \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$u = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$$

$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ sont les coordonnées de u dans $\mathcal{B}$

Alors on a : $\forall k \in [\![1;n]\!],\quad \lambda_k = \langle u | e_k \rangle$

C'est à dire : $u = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \langle u | e_k \rangle e_k$

☐

Éléments de preuve:

En notant $u = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$. Soit alors $i \in [\![1;n]\!]$. Il vient :

$$\begin{aligned} \langle u | e_i \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \,\middle|\, e_i \right\rangle \\ &\underset{\substack{\text{Bilinéarité} \\ du produit scalaire}}{=} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \underbrace{\langle e_k | e_i \rangle}_{=\begin{cases} 0 si k \neq i \\ 1 si k = i \end{cases}} \\ &= \lambda_i \end{aligned}$$

2. Produit scalaire et norme en base orthonormée

Théorème 3 – Produit scalaire et norme en base orthonormée

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée quelconque de $\mathbb{R}^n$.

Norme d'un vecteur en base orthonormée

$$\forall u \in \mathbb{R}^n, \quad \|u\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (\langle u \,|e_k\rangle)^2$$

Produit scalaire en base orthonormée

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \langle u \,|v\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle u \,|e_k\rangle \times \langle v \,|e_k\rangle$$

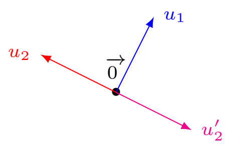
□

Éléments de preuve:

3. Existence et obtention de bases orthonormées

Proposition 1 – Le cas simple de $\mathbb{R}^2$

Si $u_1 = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ est de norme 1,
alors les vecteurs $u_2 = (y, -x)$ et $u_2' = (-y, x)$ sont tels que (u_1, u_2) et (u_1, u_2') forment des bases orthonormées de $\mathbb{R}^2$.



□

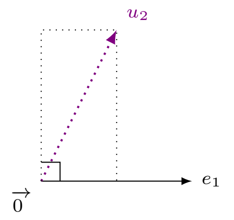
Éléments de preuve:
Il est immédiat que :

Point méthode 1 – Construire deux vecteurs orthogonaux de $\mathbb{R}^n$

Soit $e_1 \in \mathbb{R}^n$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$.

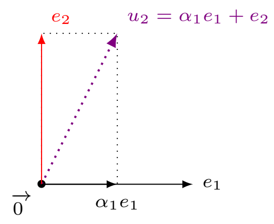
? Déterminer $e_2 \in \mathbb{R}^n$ tel que (e_1, e_2) est une famille orthogonale de $\mathbb{R}^n$.

Étape 1 | Prendre $u_2 \notin \text{Vect}\,(e_1)$



On prend un vecteur u_2 non colinéaire à e_1.

Étape 2 | Exprimer e_2 en fonction de u_1 et u_2



On cherche e_2 tel que :

$$\begin{cases} e_2 & = & \lambda_1 e_1 + u_2 \\ \langle e_1 \,| e_2 \rangle & = & 0 \quad (\star) \end{cases}$$

On détermine λ_1 à l'aide de $(\star)$

□

Application| [4728] | 1| Couple de vecteurs orthogonaux de $\mathbb{R}^5$

Soient $e_1 = (1, -1, 2, 1, 3)$. Déterminer e_2 tel que (e_1, e_2) soit une famille orthogonale de $\mathbb{R}^5$.

□

Point méthode 2 – Passer de 2 vecteurs orthogonaux à 3 vecteurs orthogonaux deux à deux

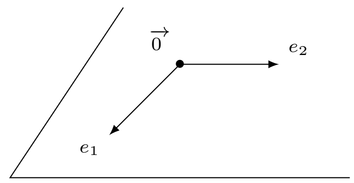
On suppose que $(e_1, e_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}^n$.

?

Déterminer $e_3 \in \mathbb{R}^n$ tel que (e_1, e_2, e_3) soit encore une famille orthogonale de $\mathbb{R}^n$

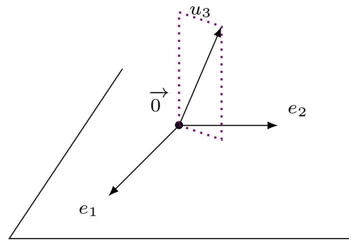
.

Étape 0 | e_1 et e_2 sont deux vecteurs orthogonaux



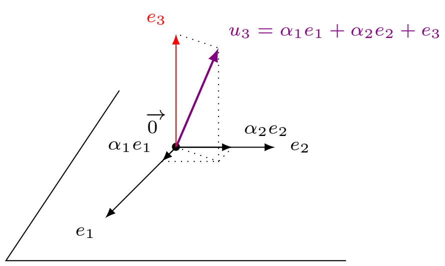
En ayant éventuellement appliqué le processus précédent, on suppose disposer de deux vecteurs e_1 et e_2 orthogonaux.

Étape 1 | Prendre $u_3 \notin \mathrm{Vect}\,(e_1, e_2)$



On introduit un vecteur u_3 qui n'appartient pas au plan vectoriel engendré par e_1 et e_2.

Étape 2 | Exprimer e_3 en fonction de e_1 et e_2



On cherche e_3 tel que :

$$\begin{cases} e_3 &= \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + u_3 \\ \langle e_1 \,|e_3\rangle &= 0 \quad (\star_1) \\ \langle e_2 \,|e_3\rangle &= 0 \quad (\star_2) \end{cases}$$

et on détermine λ_1 et λ_2 à l'aide de $(\star_1)$ et $(\star_2)$

□

Application| [4727] | 2| Famille orthogonale de $\mathbb{R}^3$

Soient $e_1 = (1, 1, 1)$ et $e_2 = (1, 0, -1)$. Déterminer e_3 tel que (e_1, e_2, e_3) soit une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

□

Théorème 4 – Existence de bases orthonormées

Complétion de familles en bases orthonormées

Si $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_p)$ où $p < n$ est une famille orthonormée de $\mathbb{R}^n$,
alors il existe une famille $n - p$ vecteurs $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ telle que la famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Éléments de preuve:
On généralise le processus de construction décrit précdemment, en construction au fur et à mesure une famille orthogonale, dont on norme ensuite les vecteurs.

Base orthonormée pour un sous-espace

Si F est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ de dimension p,
alors il existe une famille $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_p)$ de vecteurs de F qui soit une base orthonormée de F.

Éléments de preuve:
On remarque que dans le processus de construction précdent, la famille orthogonale obtenue engendre exactement le même sous-espace que la famille à partir de laquelle on la construit. On appliquera donc le résultat ci-dessus à une famille base de F.

□

4 . Produit scalaire et écritures matricielles

Proposition 2 – Lien $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Soient $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ dont on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ leur représentation matricielle dans la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

En identifiant $\mathbb{R}$ et $\mathscr{M}_1(\mathbb{R})$, on a : $\langle x \,|y \rangle = {}^tXY$.

En particulier, on a : $\|x\|^2 = {}^tXX$.

□

Éléments de preuve:

Proposition 3 – Produit scalaire, endomorphisme et matrice

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ dont on note A la représentation matricielle dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Soient $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ dont on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ leur représentation matricielle dans la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Alors en identifiant $\mathbb{R}^n$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$\langle f(x) \,|y \rangle = \langle AX \,|Y \rangle \text{ et } \langle AX \,|Y \rangle = \langle X \,\big|\, {}^tAY \rangle$$

□

Éléments de preuve: