AL16

Produit scalaire et orthogonalité dans $\mathbb{R}^n$

Version du 17-08-2022 à 17:46

Contexte

Dans tout ce qui suit, sauf mention contraire, n désignera un entier naturel non nul.

□

1. Produit scalaire et norme associée dans $\mathbb{R}^n$

Définition 1 – Produit scalaire euclidien et norme associée

- On appelle noté $\langle \bullet | \bullet \rangle$ l'application :
- On appelle noté $\|\bullet\|$ l'application :

□

Proposition 1 – Produit du produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^n$

Le produit scalaire $\langle \bullet | \bullet \rangle$ ainsi défini sur $\mathbb{R}^n$ appelé aussi **produit scalaire canonique**, possède les propriétes suivantes :

Caractère symétrique

$=$

Caractère linéaire à droite | Bilinéaire

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \langle u | \lambda v + w \rangle =$

On en déduit qu'il est aussi . On dit alors qu'il est .

Caractère positif

Caractère défini

$(\langle u | u \rangle = 0) \quad \Leftrightarrow$

□

Éléments de preuve:
Les caractères symétrique et linéaire à droite s'obtiennent directement à partir de la définition.

Remarque 1 – Lien avec les vecteurs du plan ou de l'espace

À la représentation près des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, on retrouve les formules de produit scalaire et de normes de vecteurs pour les vecteurs du plan ou de l'espace :

Dans $\mathbb{R}^2$

Pour $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan dont les coordonnées sont données dans un repère orthonormé du plan, on a :

$$\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v} = u_1v_1 + u_2v_2 \text{ et } \left\|\overrightarrow{u}\right\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

Dans $\mathbb{R}^3$

Pour $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace dont les coordonnées sont données dans un repère orthonormé de l'espace, on a :

$$\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v} = u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3 \text{ et } \left\|\overrightarrow{u}\right\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

Le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^n$ satisfait les mêmes propriétés que le produit scalaire des vecteurs du plan ou de l'espace, et prolonge simplement les définitions et résultats donnés en dimension 2 ou 3.

□

Exemple 1 – Première application numérique

Dans $\mathbb{R}^2$, calculer le produit scalaire euclidien $\langle (-2,3)\,|(-1,2)\,\rangle$:

puis la norme euclidienne de $(-3,4) \in \mathbb{R}^2$:

Dans $\mathbb{R}^3$, calculer le produit scalaire euclidien $\langle (2,1,3)\,|(-1,2,4)\,\rangle$:

puis la norme euclidienne de $(1,2,-3) \in \mathbb{R}^2$:

□

Théorème 1 – Inégalité de Cauchy-Schwarz

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, .

□

Éléments de preuve:
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. On considère la fonction $P : t \longmapsto \langle x + ty \,|x + ty \,\rangle$.
La positivité du produit scalaire donne que :

La bilinéarité du produit scalaire donne que :

Ainsi P est une fonction polynôme de degré 2 qui est de signe constant, son discriminant est donc négatif ou nul.

Proposition 2 – Homogénéité de la norme et inégalité triangulaire

Pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$\lVert\lambda u\rVert \quad =$	$(\lVert u\rVert = 0) \quad \Leftrightarrow$	$\lVert u + v\rVert \leq$ Inégalité triangulaire

□

Éléments de preuve:

(1). On rappelle que : $\forall t \in \mathbb{R},\ \sqrt{t^2} = |t|$.
Soit $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$. On a : $\lambda u = (\lambda u_1, \ldots, \lambda u_n)$.
Par suite :
$$\begin{aligned} \lVert\lambda u\rVert^2 &= (\lambda u_1)^2 + \ldots + (\lambda u_n)^2 \\ &= \lambda^2 u_1^2 + \ldots + \lambda^2 u_n^2 \\ &= \lambda^2 \left(u_1^2 + \ldots + u_n^2\right) \end{aligned}$$
ce qui donne $\lVert\lambda u\rVert^2 = \lambda^2 \lVert u\rVert^2$ et finalement $\lVert\lambda u\rVert = |\lambda| \, \lVert u\rVert$.

(2). C'est une simple conséquence du caractère défini du produit scalaire.

(3). Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. D'après l'inéalité de Cauchy-Schwarz, on a $|\langle u \,|v \,\rangle| \leq \lVert u\rVert \, \lVert v\rVert$ et ainsi $\langle u \,|v \,\rangle \leq \lVert u\rVert \, \lVert v\rVert$.
De plus, par bilinéarité du produit scalaire :

Proposition 3 – Formules liant produit scalaire et norme

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on a :

Identités remarquables

Identités de polarisation

Identité du parallélogramme

$\square$

Éléments de preuve:

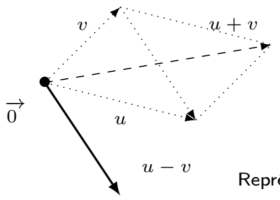
2. Distance dans $\mathbb{R}^n$

Définition 2 – Distance euclidienne

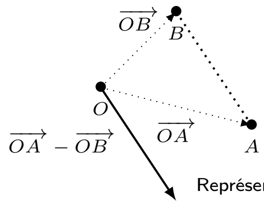
On appelle distance euclidienne de $\mathbb{R}^n$ noté $\mathrm{d}(\bullet, \bullet)$ l'application :

☐

Remarque 2 – Interprétation géométrique



Représentation vectorielle



$$\begin{aligned} AB &= \left\|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right\| \\ &= \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \end{aligned}$$

Représentation dans le plan ou l'espace

La distance entre les deux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ dont les coordonnées sont vues comme des éléments de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ est égale à la distance entre les deux points A et B

☐

Proposition 4 – Homogénéité et inégalité triangulaire pour la distance euclidienne

Pour tout $(u, v, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

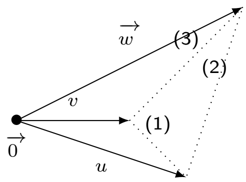
$$\mathrm{d}(u, v) \quad =$$

$$\mathrm{d}(\lambda u, \lambda v) \quad =$$

$$(\mathrm{d}(u, v) = 0) \quad \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{d}(u, v) \leq \mathrm{d}(u, w) + \mathrm{d}(w, v)$$

Inégalité triangulaire



$$\begin{aligned} (1) &= \mathrm{d}(u, v) \\ (2) &= \mathrm{d}(u, w) \\ (3) &= \mathrm{d}(w, v) \end{aligned}$$

☐

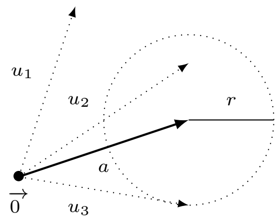
Éléments de preuve:

3. Boules de $\mathbb{R}^n$

Définition 3 – Boule ouverte et boule fermée

Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. On appelle :

Boule ouverte de centre a et de rayon r	Boule fermée de centre a et de rayon r
$\mathcal{B}_o(a,r) = \{u \in \mathbb{R}^n,\ \mathrm{d}(a,u) < r\}$	$\mathcal{B}_f(a,r) = \{u \in \mathbb{R}^n,\ \mathrm{d}(a,u) \leq r\}$



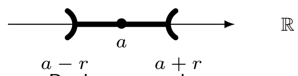
$u_1 \ldots\ldots \mathcal{B}_o(a,r)$
$u_1 \ldots\ldots \mathcal{B}_f(a,r)$
$u_2 \ldots\ldots \mathcal{B}_o(a,r)$
$u_2 \ldots\ldots \mathcal{B}_f(a,r)$
$u_3 \ldots\ldots \mathcal{B}_o(a,r)$
$u_3 \ldots\ldots \mathcal{B}_f(a,r)$

□

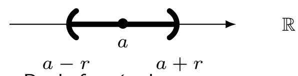
Remarque 3 – Représentation des boules dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$

Pour se représenter les boules ouvertes et fermées dans $\mathbb{R}^n$ avec $n \in \{1,2,3\}$, on fera abstraction de la représentation vectorielle des éléments de $\mathbb{R}^n$ tel qu'on vient de le faire dans la définition.

Boules de $\mathbb{R}$ | Pour $a \in \mathbb{R}$



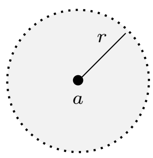
Boule ouverte de centre a et de rayon r



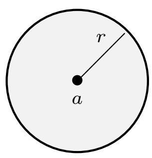
Boule fermée de centre a et de rayon r

On reconnaît les intervalles ouverts et fermés.

Boules de $\mathbb{R}^2$ | Pour $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$



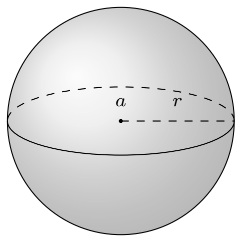
Boule ouverte de centre a et de rayon r



Boule fermée de centre a et de rayon r

On reconnaît les disques, avec ou non leur bord.

Boules de $\mathbb{R}^3$ | Pour $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$



On reconnaît les sphères, avec ou non leur surface.

□

4. Orthogonalité

Définition 4 – Vecteurs orthogonaux pour un produit scalaire

Orthoganlité de deux vecteur

On dit que les vecteurs $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^n$ sont lorsque et on le note .

Famille orthogonale

On dit que la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ de $\mathbb{R}^n$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ lorsque :

Autrement dit : $\forall (i,j) \in [\![1;p]\!] \times [\![1;p]\!]\,,\, i \neq j,$

Famille orthonormée

On dit que la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est une famille ou orthonormale de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ lorsque c'est une famille telle que pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, .

□

Proposition 5 – Normer un vecteur

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $x \neq \overrightarrow{0}$.
Alors le vecteur $\dfrac{1}{\|x\|}x$ est un vecteur unitaire.

□

Éléments de preuve:

Théorème 2 – Théorème de Pythagore pour deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Alors :

$$(x \perp y) \quad \Leftrightarrow$$

□

Éléments de preuve:
D'après l'identité de polarisation :

Théorème 3 – Théorème de Pythagore pour une famille de $p \geq 3$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$

Si $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille de $p \geq 3$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$,
alors .

Réciproque fausse dans ce cas.

□

Théorème 4 – Liberté d'une famille orthogonale

Si $(u_1, \ldots, u_p)$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ le vecteur nul $\overrightarrow{0}$,
alors la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est une de $\mathbb{R}^n$.

□

Éléments de preuve:

5. Vecteur orthogonal à un sous-espace

Définition 5 – Vecteur orthogonal à un sous-espace

Soit x un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et F un de $\mathbb{R}^n$.
On dit que le vecteur x est à F lorsqu'il est orthogonal à vecteur de F.
Ainsi, on a : (x est orthogonal à F) $\Leftrightarrow$

□

Théorème 5 – Famille génératrice et orthogonalité

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ tel que $F = \mathrm{Vect}\,(f_1, \ldots, f_p)$.

$$\left(\begin{array}{l}\text{Un vecteur } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{est orthogonal à } F\end{array}\right) \Leftrightarrow$$

□

Point méthode 1 – Vecteur orthogonal à un sous-espace

Pour montrer qu'un vecteur x de $\mathbb{R}^n$ est orthogonal à un sous-espace F de $\mathbb{R}^n$, on peut :

Étape 1 : chercher une famille $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_p)$ génératrice de F, c'est à dire $F = \mathrm{Vect}\,(f_1, \ldots, f_p)$.

Étape 2 : montrer que pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, le vecteur x est orthogonal au vecteur f_i, c'est à dire :

$$\forall i \in [\![1;p]\!], \quad \langle x \,|\, f_i \rangle = 0$$

□

Application|[4065]| 1| Vecteur orthogonal à un sous-espace de $\mathbb{R}^4$

On munit $\mathbb{R}^4$ de son produit scalaire canonique et on considère le sous-espace F de $\mathbb{R}^4$ donné par :

$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ 2x - t = 0,\ x + 2y - z = 0\right\}$$

Montrer que le vecteur $\overrightarrow{u} = (1, -2, 1, -1)$ est orthogonal à F.

□

Définition 6 – Sous-espace orthogonaux

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.
On dit que F et G sont orthogonaux lorsque : $\forall (f, g) \in F \times G,\ \langle f \,|g\rangle = 0$
Lorsque ce sera le cas, on notera $F \perp G$.

□

Exemple 2 – Deux sous-espaces orthogonaux de $\mathbb{R}^3$

?

Montrer que $H = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 0\right\}$ et $G = \mathrm{Vect}\left((1, 1, 1)\right)$ sont deux sous-espaces orthogonaux de $\mathbb{R}^3$.

□

6 . Orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Définition 7 – Orthogonal d'un sous-espace

Soit F un vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
On appelle de F et on note , l'ensemble défini par :

On retiendra donc que : est l'ensemble des les vecteurs de F

Il vient notamment que : $E^\perp = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ et $\left\{\overrightarrow{0}\right\}^\perp = E$.

□

Théorème 6 – Structure vectorielle de l'orthogonal

Si F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, alors $F^\perp$ est un vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

□

Éléments de preuve:

- $F^\perp \subset E$ **:** par définition de $F^\perp$.
- $\overrightarrow{0} \in F^\perp$ **:** en effet, le vecteur nul étant orthogonal à tous les vecteurs de $\mathbb{R}^n$, il est orthogonal à tous les vecteurs de F.
- **Stabilité de $F^\perp$ par combinaison linéaire :** soient $u_1 \in F^\perp$, $u_2 \in F^\perp$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $w = \lambda u_1 + u_2$. Pour tout $f \in F$, on a :

  Donc $\lambda u_1 + u_2 \in F^\perp$ ce qui est ce que l'on voulait.

Proposition 6 – Propriétés de l'orthogonal

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels orthogonaux de $\mathbb{R}^n$.

.

Éléments de preuve:
Soit $x \in F \cap G$. Il vient que $\langle x \,|\, x \rangle = 0$ car $x \in F$ et $x \in G$ avec $F \perp G$. Donc $\|x\| = 0$ ce qui donne $x = \overrightarrow{0}$. D'où l'inclusion $F \cap G \subset \left\{\overrightarrow{0}\right\}$, l'inclusion réciproque étant triviale.

Éléments de preuve:
Puisque F et $F^\perp$ sont orthogonaux d'après le point précédent, il vient que $F \cap F^\perp = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

.

Éléments de preuve:
Par définition, $\left(F^\perp\right)^\perp = \left\{u \in E,\ \forall f \in F^\perp,\ \langle u \,|\, f \rangle = 0\right\}$.
Soit alors $x \in F$. Montrons que $x \in \left(F^\perp\right)^\perp$, c'est à dire que : $\forall f \in F^\perp,\ \langle x \,|\, f \rangle = 0$.
Soit alors $f \in F^\perp$. Comme $x \in F$, et $f \in F^\perp$, il vient que $\langle x \,|\, f \rangle = 0$, donc $x \in \left(F^\perp\right)^\perp$ d'où l'inclusion voulue.

□

Application| [4067] **| 2| Orthogonal d'un sous-espace de $\mathbb{R}^4$**

On munit $\mathbb{R}^4$ de son produit scalaire canonique et on considère le sous-espace F de $\mathbb{R}^4$ donné par : $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ 2x - t = 0,\ x + 2y - z = 0\}$.
Déterminer une base de $F^\perp$.

□