AL15

Diagonalisation de matrices et d'endomorphismes

Version du 01-11-2022 à 19:18

1. Préambule

Introduction – Matrices et suites imbriquées

On considère les trois suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 1$, $v_0 = -1$, $z_0 = 2$ et les relations suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_{n+1} & = & x_n & - & y_n & - & z_n \\ y_{n+1} & = & -\ x_n & + & y_n & - & z_n \\ z_{n+1} & = & -\ x_n & - & y_n & + & z_n \end{array} \right.$$

? Déterminer l'expression de x_n, y_n et z_n en fonction de n.

En posant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$, on remarque que : $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

À l'aide d'un raisonnement par récurrence, on peut montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$.

Que vaut A^n ?

À l'aide de la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, on peut montrer que $A = PDP^{-1}$.

Puis, à l'aide d'un raisonnement par récurrence on peut établir que : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$.

La matrice D étant diagonale, on établit que $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

on obtient alors que : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 1-2^n & 2^n-1 \\ 2^{n+1}-2 & 2-2^n & 2^n-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On obtient X_n en fonction de n, puis x_n, y_n et z_n en fonction de n :

$$\begin{array}{rcl} \forall n \in \mathbb{N}, X_n & = & \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 1-2^n & 2^n-1 \\ 2^{n+1}-2 & 2-2^n & 2^n-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 2(2^n-1)+2^n+2^{n+1}-2 \\ 2(2^n-1)+2^n+2^{n+1}-4 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

d'où : $\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{rcl} x_n & = & 2(2^n-1)+2^n+2^{n+1}-2 \\ y_n & = & 2(2^n-1)+2^n+2^{n+1}-4 \\ z_n & = & 2 \end{array} \right.$

? Mais comment a-t-on trouvé les matrices P et D ?

□

Contexte – Dans tout ce qui suit :

- m, n, p et q désigneront des éléments de $\mathbb{N}^*$;
- E désignera un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie qui pourra être $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[x]$ ou $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

□

2. Valeur propre d'une matrice ou d'un endomorphisme

Définition 1 – Éléments propres d'un endomorphisme

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On dit que λ est **valeur propre de l'endomorphisme** f lorsqu'il existe un vecteur $u \in E$ NON NUL tel que :

$$\underset{\text{avec } u \neq \overrightarrow{0}}{f(u) = \lambda . u}$$

Un tel vecteur $u \in E$ est appelé vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.

$$\left(\begin{array}{c}\lambda \in \mathbb{R} \text{ est} \\ \text{valeur propre} \\ \text{de } f\end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\exists u \in E, \left\{\begin{array}{ccc} u & \neq & \overrightarrow{0} \\ f(u) & = & \lambda u \end{array}\right.\right)$$

Spectre d'un endomorphisme

L'ensemble des valeurs propres de f est appelé **spectre de l'endomorphisme** f et on le note $\mathrm{sp}(f)$:

$$\mathrm{sp}(f) = \left\{\lambda \in \mathbb{R},\, \exists u \in E,\, u \neq \overrightarrow{0} \text{ et } f(u) = \lambda u\right\}$$

□

Exemple 1 – Valeur propre d'un endomorphisme

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array}\right.$. On peut montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$.

De plus : $f\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ donc 3 est valeur propre de f et $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associée à la valeur propre 3.

□

Définition 2 – Éléments propres d'une matrice

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On dit que λ est **valeur propre de la matrice** A lorsqu'il existe une matrice colonne $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ NON NULLE telle que :

$$\underset{\text{avec } X \neq (0)}{AX = \lambda X}$$

Une telle matrice colonne $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est appelée vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

$$\left(\begin{array}{c}\lambda \in \mathbb{R} \text{ est} \\ \text{valeur propre} \\ \text{de } A\end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\exists X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \left\{\begin{array}{ccc} X & \neq & (0) \\ AX & = & \lambda X \end{array}\right.\right)$$

Spectre d'une matrice

L'ensemble des valeurs propres de A est appelé spectre de la matrice A et on le note $\mathrm{sp}(A)$.

$$\mathrm{sp}(A) = \{\lambda \in \mathbb{R},\, \exists X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\, X \neq (0) \text{ et } AX = \lambda X\}$$

□

Exemple 2 – Valeur propre d'une matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Un calcul direct donne que $AX = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ et donc que $AX = 3X$.
Par suite 3 est valeur propre de la matrice A et X est un vecteur propre associée à la valeur propre 3.

□

3. Sous-espaces propres d'une matrice et d'un endomorphisme

Définition 3 – Sous-espace propre pour un endomorphisme/une matrice

Sous-espace propre d'un endomorphisme

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de f.

L'ensemble des vecteurs propres de f associés à la valeur propre λ, noté $E_\lambda(f)$, est appelé sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ.

$$\begin{aligned} E_\lambda(f) &= \{u \in E,\ f(u) = \lambda u\} \\ &= \operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \end{aligned}$$

Sous-espace propre d'une matrice

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A.

L'ensemble des vecteurs propres de A associés à la valeur propre λ, noté $E_\lambda(A)$, est appelé sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ.

$$\begin{aligned} E_\lambda(A) &= \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ AX = \lambda X\} \\ &= \operatorname{Ker}(A - \lambda \mathrm{I}_n) \end{aligned}$$

Structure vectorielle d'un sous-espace propre

Pour $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, en considérant la définition d'un sous-espace propre donné par le noyau d'une application linéaire/matrice, on directement que :

(1). $E_\lambda(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

(2). $E_\lambda(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

□

Exemple 3 – Sous-espace propre d'une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

On remarque que : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc que 3 est valeur propre de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

? Déterminer tous les vecteurs propres de A associés à la valeur propre 3.

□

4. Recherche des éléments propres

Contexte – Finalité du travail à venir

La finalité de ce chapitre est, pour les endomorphismes et les matrices, d'être capable de déterminer toutes les valeurs propres et pour chacun des sous-espaces propres associés, en déterminer une base.

□

Point méthode 1 – Déterminer un sous-espace propre d'un endomorphisme/une matrice

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre, alors pour déterminer une base du sous-espace propre associé, on cherche :

Pour $f \in \mathcal{L}(E)$	Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$
« à décrire » tous les vecteurs $u \in E$ tels que $f(u) = \lambda.u$	« à décrire » toutes les matrices colonnes $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $AX = \lambda X$
$\begin{aligned} (u \in E_\lambda(f)) &\Leftrightarrow (f(u) = \lambda.u) \\ &\Leftrightarrow \ldots \\ &\Leftrightarrow u \in \mathrm{Vect}(\ldots) \end{aligned}$	$\begin{aligned} (X \in E_\lambda(A)) &\Leftrightarrow (AX = \lambda X) \\ &\Leftrightarrow \ldots \\ &\Leftrightarrow X \in \mathrm{Vect}(\ldots) \end{aligned}$

□

Application| [3809] | 1| Recherche d'un sous-espace propre

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$ donné par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[x] \\ P & \longmapsto & (x^2-1)\,P' - (2x+1)P \end{array} \right.$$

(1). Montrer que $x \longmapsto (x-1)^2$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre 1.

(2). Déterminer alors $E_1(f)$.

□

Application| [3810] | 2| Sous-espaces propres d'une matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1). En observant les lignes de A, montrer que 1 est valeur propre de A.

(2). Expliciter la matrice $A - 2\mathrm{I}_3$ et en déduire que 2 est valeur propre de A.

(3). Déterminer alors complètement $E_{-1}(A)$ et $E_2(A)$.

□

Remarque – Comment trouver les valeurs propres ?

Montrer qu'un vecteur est un vecteur propre associé à une valeur propre ou trouver une base d'un sous-espace propre semble consister « simplement » en la traduction sous forme d'un calcul ou une résolution d'équation des définitions précédemment données.

? Cependant. . .comment trouver les valeurs propres ?

□

5. Caractérisation des valeurs propres par le rang

Théorème 1 – Valeur propre et rang d'une matrice/un endomorphisme

Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

$$\left(\begin{array}{c}\lambda \in \mathbb{R} \text{ est} \\ \text{valeur propre} \\ \text{de A}\end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c}\text{La matrice} \\ A - \lambda \mathrm{I}_n \\ \text{n'est pas inversible}\end{array}\right)$$

Éléments de preuve:

$$\begin{array}{ll} & (\lambda \in \mathbb{R} \text{ est valeur propre de } A) \\ \Leftrightarrow & (\exists X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \neq (0),\ AX = \lambda X) \\ \Leftrightarrow & (\exists X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \neq (0),\ AX - \lambda X - = (0)) \\ \Leftrightarrow & (\exists X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \neq (0),\ (A - \lambda \mathrm{I}_n) X = (0)) \\ \Leftrightarrow & (\exists X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \neq (0),\ X \in \operatorname{Ker}(A - \lambda \mathrm{I}_n)) \\ \Leftrightarrow & (\operatorname{Ker}(A - \lambda \mathrm{I}_n) \neq \{(0)\}) \\ \Leftrightarrow & \operatorname{rg}(A - \lambda \mathrm{I}_n) < n \\ \Leftrightarrow & (\lambda A - \mathrm{I}_n) \text{ non inversible} \end{array}$$

Pour $f \in \mathcal{L}(E)$

$$\left(\begin{array}{c}\lambda \in \mathbb{R} \text{ est} \\ \text{valeur propre} \\ \text{de } f\end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c}\text{L'endomorphisme} \\ f - \lambda \mathrm{Id}_E \\ \text{n'est pas injectif}\end{array}\right)$$

Éléments de preuve:

$$\begin{array}{ll} & (\lambda \text{ est valeur propre de } f) \\ \Leftrightarrow & \left(\exists u \neq \overrightarrow{0_E},\ f(u) = \lambda u\right) \\ \Leftrightarrow & \left(\exists u \neq \overrightarrow{0_E},\ f(u) - \lambda u = \overrightarrow{0}\right) \\ \Leftrightarrow & \left(\exists u \neq \overrightarrow{0_E},\ (f - \lambda \mathrm{Id}_E)\, u = \overrightarrow{0}\right) \\ \Leftrightarrow & \left(\exists u \neq \overrightarrow{0_E},\ u \in \operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id}_E)\right) \\ \Leftrightarrow & \left(\operatorname{Ker}(\lambda f - \mathrm{Id}_E) \neq \left\{\overrightarrow{0_E}\right\}\right) \\ \Leftrightarrow & (\lambda f - \mathrm{Id}_E \text{ non injectif}) \end{array}$$

□

Point méthode 2 – Rechercher les valeurs propres d'une matrice à partir du rang

Pour déterminer les valeurs propres d'une matrice A à l'aide d'une recherche de rang :

- on explicite la matrice $A - \lambda \mathrm{I}_n$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ quelconque.
- on échelonne la matrice $A - \lambda \mathrm{I}_n$ pour en déterminer le rang.
- les valeurs propres de A sont alors les valeurs de λ pour lesquelles $\operatorname{rg}(A - \lambda \mathrm{I}_n) < n$.
  Ce seront donc celles qui, après échelonnement, annuleront les pivots de l'échelonnée obtenue.

□

Application| [3811] **| 3| Recherche de valeurs propres**

Déterminer les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ puis les sous-espaces propres associés.

□

Théorème 2 – Valeur propre nulle pour un endomorphisme/une matrice

Pour $f \in \mathcal{L}(E)$

$$\begin{pmatrix} 0 \text{ est valeur} \\ \text{propre} \\ \text{de } f \in \mathcal{L}(E) \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} f \text{ n'est pas} \\ \text{injective} \end{pmatrix}$$

Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} 0 \text{ est valeur} \\ \text{propre} \\ \text{de } A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} A \text{ n'est pas} \\ \text{inversible} \end{pmatrix}$$

□

Exemple 4 – Matrice de rang 1

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ possède au moins deux valeurs propres :

- tout d'abord la valeur propre 0 puisque A est clairement de rang $1 < 3$ donc non inversible.
  Par ailleurs, le sous-espace propre $E_0(A)$ est de dimension 2 d'après le théorème du rang.
- puis la valeur propre 6 puisque $\begin{cases} 1+2+3=6 \\ 1+2+3=6 \\ 1+2+3=6 \end{cases}$ et donc que $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$.

  Et ainsi, on a que $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 6 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

□

6. Valeur propre et polynôme annulateur

Contexte

Les éléments présentés ici sont à connaître et à systématiquement redemontrér dans le contexte proposé.

☐

Proposition 1 – Puissance de matrice et valeur propre

Si λ est valeur propre de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et que $X \in E_\lambda(A)$, alors on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n X = \lambda^n X.$

☐

Éléments de preuve:

Exemple 5

Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. On admet que : $M^3 + 3M^2 - M - 3\mathrm{I}_3 = (0).$

Déterminer les valeurs propres possibles de M.

☐

Proposition 2 – Spectre et polynôme annulateur

On suppose que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est telle qu'il existe $(a_0, \ldots, a_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ tel que $\underbrace{a_0\mathrm{I}_n + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_p A^p}_{\text{polynôme annulateur de } A} = (0).$

Si λ est une valeur propre de A, alors λ est une solution de $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_p x^p = 0.$

☐

Éléments de preuve:
On généralise le raisonnement présenté dans exemple précédent.

7. Le coin des astuces...

Exemple 6 – Image d'un vecteur de base

Soit $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ tel que sa matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

f admet -4 pour valeur propre et e_3 est un vecteur propre associé à cette valeur propre.

En effet, cette matrice A est construite ainsi : $\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$ et on y lit directement que $f(e_3) = -4e_3$.

□

Exemple 7 – Somme des lignes constantes

Il est immédiat de voir que 6 est une valeur propre de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

En effet : $\begin{cases} 1+2+3=6 \\ 2+3+1=6 \\ 3+2+1=6 \end{cases}$ et donc que $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ et donc que $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

□

Exemple 8 – Et avec le noyau...

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On remarque dans un premier temps que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et donc que -1 est valeur propre de A.

Par ailleurs, il est immédiat que 0 est valeur propre de A puisque la matrice A n'est pas inversible puisque une de ses colonnes est nulle et il est immédiat que $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_0(A)$.

Par ailleurs, on remarque qu'en notant C_1, C_2, C_3 les colonnes de 1, on a $2C_1 + C_3 = (0)$ ce qui assure que $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_0(A)$ puisque l'on a bien que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (0)$.

On peut même dire grâce au théorème du rang que $\dim(E_0(A)) = 2$ puisque la matrice A est clairement de rang 1 dans la mesure où une de ses colonnes est nulle et que les deux autres sont proportionnelles.

□

8 . Lien endomorphisme et matrice

Théorème 3 – Représentation matricielle et éléments propres

oit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base quelconque de E. On note par ailleurs $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

$$\left(\begin{array}{c}\lambda \text{ est une} \\ \text{valeur propre} \\ \text{de } f\end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c}\lambda \text{ est une} \\ \text{valeur propre} \\ \text{de } A\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c}u \in E \text{ est un} \\ \text{vecteur propre} \\ \text{de } f \text{ associé} \\ \text{à } \lambda\end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c}X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \\ \text{est un vecteur} \\ \text{propre de } A \\ \text{associé à } \lambda\end{array}\right)$$

□

Point méthode 3 – Obtenir les éléments propres d'un endomorphisme

Pour obtenir les valeurs propres et les vecteurs propres de $f \in \mathcal{L}(E)$ avec $\dim(E) = n$:

- on choisit une base $\mathcal{B}$ quelconque de E ;
- on explicite $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$;
- on cherche les valeurs propres et les vecteurs propres associés de la matrice A ;
- on revient à E en explicitant dans $\mathcal{B}$ les représentations matricielles des vecteurs propres trouvés pour A.

□

Exemple 9 – Exploiter les définitions pour la recherche des éléments propres

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

On remarque que la matrice A est de rang 2 puisque $C_1 = 2C_2$. Ainsi, la matrice A n'est pas inversible et $0 \in \mathrm{sp}(A)$ et donc $0 \in \mathrm{sp}(f)$.

Puisque $C_1 = 2C_2$ on en déduit que $f(e_1) = 2 \times f(e_2)$ ce que l'on peut écrire par linéarité de f que $f(e_1 - 2e_2) = \overrightarrow{0}$. Ainsi $e_1 - 2e_2 \in E_0(f)$.

D'après le théorème du rang, on a $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3 - 2$ et donc $E_0(f) = \mathrm{Ker}(f)$ est une droite vectorielle donc de dimension 1. On a alors : $E_0(f) = \mathrm{Vect}(e_1 - 2e_2)$.

□

Application| [3815] | 4| Recherche d'éléments propres

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ et l'endomorphisme f de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array} \right. .$$

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

□

9. Liberté d'une famille de vecteurs propres

Théorème 4 – Famille de vecteurs propres d'un endomorphisme

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
Si $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ sont p valeurs propres **distinctes deux à deux** de f et $u_1,\ldots,u_p$ des vecteurs propres associés à $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$,
alors la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est une famille libre de vecteurs de E.

Famille de vecteurs propres d'une matrice

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Si $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ sont p valeurs propres **distinctes deux à deux** de A et $X_1, \ldots, X_p$ des vecteurs propres associés à $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$,
alors la famille $(X_1, \ldots, X_p)$ est une famille libre de vecteurs colonnes de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$\square$

Éléments de preuve:

Supposons que l'on ait $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que : $(\star) : \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_p u_p = \overrightarrow{0}$.

f étant une application linéaire, on en déduit : $\alpha_1 \underbrace{f(u_1)}_{=\lambda_1 u_1} + \alpha_2 \underbrace{f(u_2)}_{=\lambda_2 u_2} + \ldots + \alpha_p \underbrace{f(u_p)}_{=\lambda_p u_p} = \overrightarrow{0}$.

Ainsi : $(\diamond) : \alpha_1 \lambda_1 u_1 + \alpha_2 \lambda_2 u_2 + \ldots + \alpha_p \lambda_p u_p = \overrightarrow{0}$.

En effectuant $(\diamond) - \lambda_p (\star)$, on obtient :

$$(\heartsuit) : \alpha_1 \underbrace{(\lambda_p - \lambda_1)}_{\neq 0} u_1 + \alpha_2 \underbrace{(\lambda_p - \lambda_2)}_{\neq 0} u_2 + \ldots + \alpha_{p-1} \underbrace{(\lambda_p - \lambda_{p-1})}_{\neq 0} u_{p-1} = \overrightarrow{0}$$

Effectuer un raisonnement par récurrence sur le nombre de vecteurs propres !

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(p)$: l'énoncé de cette proposition.
Montrons par récurrence sur l'entier p que $\mathcal{P}(p)$ est vraie pour tout entier $p \geq 1$.

Initialisation : la famille (u_1) est clairement libre, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Supposons $\mathcal{P}(p-1)$ et montrons $\mathcal{P}(p)$.
En reprenant le raisonnement ci-dessus, la famille $(u_1, \ldots, u_{p-1})$ est une famille de $p-1$ vecteurs propres associés à $p-1$ valeurs propres distinctes deux à deux, donc forme une famille libre, donc la relation $(\heartsuit)$ permet d'écrire que $\begin{cases} \alpha_1 (\lambda_p - \lambda_1) = 0 \\ \alpha_2 (\lambda_p - \lambda_2) = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{p-1} (\lambda_p - \lambda_{p-1}) = 0 \end{cases}$ et donc que $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{p-1}$ puisque les valeurs propres sont distinctes deux à deux. En reportant ensuite dans $(\star)$, il vient que $\alpha_p = 0$, ce qui assure la liberté de la famille et $\mathcal{P}(p)$.

Conclusion : $\mathcal{P}(p)$ étant initialisée au rang 1 et héréditaire, par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier p.

Théorème 5 – Cardinal du spectre

Une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ admet au plus n valeurs propres distinctes.

Un endomorphisme d'un espace vectoriel E tel que $\dim(E) = n$ admet au plus n valeurs propres distinctes.

$\square$

Éléments de preuve:

Théorème 6 – Base de vecteurs propres

Pour $f \in \mathcal{L}(E)$ avec $\dim(E) = n$

Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont n valeurs propres **distinctes deux à deux** et si $u_1, \ldots, u_n$ sont des vecteurs propres associés à $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$,
alors la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E, appelée base de vecteurs propres de f.

Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont n valeurs propres **distinctes deux à deux** et si $X_1, \ldots, X_n$ sont des vecteurs propres associés à $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$,
alors la famille $(X_1, \ldots, X_n)$ est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, appelée base de vecteurs propres de A.

□

Application| [4721] | 5| Obtention d'une base de vecteurs propres

On considère l'endomorphisme $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y, 2x+y, x+y+z) \end{array} \right.$.

(1). Écrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, puis sans aucun calcul, donner une valeur propre de f et un vecteur propre u_1 associé.

(2). Vérifier que $u_2 = (-1, 1, 0)$ est un vecteur propre de f.

(3). Montrer que 3 est valeur propre de f et en donner un vecteur propre u_3 associé.

(4). Que dire de la famille (u_1, u_2, u_3) ?

□

10. Endomorphismes et matrices diagonalisables

Définition 4 – Endomorphisme diagonalisable

On dit que $f \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ lorsqu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale.

□

Exemple 10 – Endomorphisme diagonalisable

? L'endomorphisme $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2y+4z, 3x+3z, 4x+2y) \end{array} \right.$ est-il diagonalisable ?

Un calcul direct donne :

- $f(1,1,1) = (6,6,6)$ donc $(1,1,1) \in E_6(f)$.
- $f(1,-3,1) = (-2,6,-2)$ donc $(1,-3,1) \in E_{-2}(f)$.
- $f(-1,0,1) = (4,0,-4)$ donc $(-1,0,1) \in E_{-4}(f)$.

La famille $\mathcal{B} = ((1,1,1),(1,-3,1),(-1,0,1))$ est formée de 3 vecteurs propres associés à 3 valeurs propres distinctes deux à deux. Par théorème elle forme une base de $\mathbb{R}^3$.

De plus on a : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ qui est diagonale et donc f est diagonalisable.

□

Application| [4723] | 6| Endomorphisme diagonalisable

Déterminer la matrice dans la base $\mathcal{B} = ((1,1),(1,-1))$ de $\mathbb{R}^2$ de l'endomorphisme $f : (x,y) \longmapsto \left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x+y}{2}\right)$. Qu'en déduire pour f ?

□

Définition 5 – Matrice diagonalisable

On dit que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice diagonalisable sur $\mathbb{R}$ lorsqu'il existe une matrice à coefficients dans $\mathbb{R}$ inversible P et une matrice diagonale D telle que $A = PDP^{-1}$.

Une matrice est diagonalisable lorsqu'elle est semblable à une matrice diagonale.

□

Exemple 11 – Matrice diagonalisable

La matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 4 \\ 8 & -9 & 4 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

.

La matrice $P = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible car $\text{rg}(P) = 3$ et on a $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Un calcul direct donne que $P^{-1}AP = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=D}$.

Ainsi, on trouve que $A = PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale, et par conséquent, la matrice A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

□

Application| [4722] | 7| Diagonalisation d'une matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(1). En observant la matrice A, déterminer deux valeurs propres de A, et deux vecteurs propres X_1 et X_2 associés à ces valeurs propres.

(2). Montrer que 1 est valeur propre de A et déterminer un vecteur propre X_3 associé.

(3). Soit P la matrice dont les colonnes sont les trois matrices colonnes X_1, X_2 et X_3. Montrer que P est inversible et en déterminer son inverse.

(4). La matrice A est-elle diagonalisable ?

□

11. Théorèmes de diagonalisation

Théorème 7 – Diagonalisation d'une représentation matricielle

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est de dimension finie, et on note $\mathcal{B}$ une base quelconque de E.

$$(f \text{ est diagonalisable}) \quad \Leftrightarrow \quad (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \text{ est diagonalisable})$$

$\square$

11.1. | À partir du nombre de valeurs propres

Théorème 8 – Matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à n valeurs propres distinctes

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ admet n valeurs propres distinctes deux à deux, alors A est diagonalisable.

Endomorphisme à n valeurs propres distinctes en dimension n

Si $f \in \mathcal{L}(E)$ avec $\dim(E) = n$ admet n valeurs propres distinctes deux à deux, alors f est diagonalisable.

$\square$

Éléments de preuve:
En notant $(u_1, \ldots, u_n)$ la famille formée par les n vecteurs propres associés aux n valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ distinctes deux à deux de f, d'après ce qui précède, cette dernière forme une base de E, dans laquelle la matrice de f est par construction :

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{cccc} f(u_1) & f(u_2) & & f(u_n) \end{array} & \\
\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} & \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ \\ u_n \end{array}
\end{array}$$

Exemple 12 – Endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ à 3 valeurs propres distinctes

L'endomorphisme $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2y+4z, 3x+3z, 4x+2y) \end{array} \right.$ possède au plus 3 valeurs propres puisque $\dim\left(\mathbb{R}^3\right) = 3$.

Comme $\left\{ \begin{array}{l} f(1,1,1) = 6(1,1,1) \\ f(1,-3,1) = -2(1,-3,1) \\ f(-1,0,1) = -4(1,0,-1) \end{array} \right.$ on a $\mathrm{sp}(f) = \{-4, -2, 6\}$.

Ainsi on a : $\left\{ \begin{array}{l} f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right) \\ f \text{ possède } 3 \text{ valeurs propres distinctes} \end{array} \right.$ donc par théorème, f est diagonalisable.

$\square$

Application| [4725] | 8| Matrice 3×3 avec 3 valeurs propres

Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -9 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$. Calculer $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Qu'en déduire pour A ?

□

Proposition 3 – Spectre réduit à une seule valeur

Un endomorphisme diagonalisable qui possède une unique valeur propre λ est l'endomorphisme $\lambda \mathrm{Id}_E$.

Une matrice diagonalisable qui possède une unique valeur propre λ est la matrice $\lambda \mathrm{I}_n$

□

Éléments de preuve:

Exemple 13

? La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

□

11.2. | À partir d'une base de vecteurs propres

Théorème 9 – Base diagonalisante

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors : (f est diagonalisable) $\Leftrightarrow$ $\left(\begin{array}{c}\text{Il existe une base de } E \text{ formée} \\ \text{entièrement de vecteurs propres de } f\end{array}\right)$

□

Éléments de preuve:
C'est immédiat puisque dans une base formée entièrement de vecteurs propres de f, la matrice de f est par construction de la forme :

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} f(u_1) & f(u_2) & & f(u_n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} & \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ \\ u_n \end{array} \end{array}$$

Application| [4724] | 9| Diagonalisation d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

On considère l'endomorphisme $f : (x, y, z) \longmapsto ((3x + y + z, x + 3y + z, x + y + 3z))$ de $\mathbb{R}^3$.

(1). Montrer que la famille $\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$ est une base de vecteurs propres de $\mathbb{R}^3$.

(2). Qu'en déduire pour f ?

□

11.3. | À partir des sous-espaces propres

Proposition 4 – Stabilité d'un sous-espace propre

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de $f \in \mathcal{L}(E)$, alors : $\forall u \in E_\lambda(f),\ f(u) \in E_\lambda(f)$.

□

Éléments de preuve:

Soit $\overrightarrow{v} \in E_\lambda(f)$.

Par définition $f\left(\overrightarrow{v}\right) = \lambda\overrightarrow{v}$ et donc $f\left(\overrightarrow{v}\right) \in \operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{v}\right)$.

Or $\operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{v}\right)$ est clairement un sous-espace vectoriel de $E_\lambda(f)$ et par suite $f\left(\overrightarrow{v}\right) \in E_\lambda(f)$.

Exemple 14 – Combinaison linéaire de vecteurs propres

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array} \right.$.

On a $f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 3 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et donc $\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in E_3(f) \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in E_3(f) \end{array} \right.$.

$E_3(f)$ est une sous-espace propre donc stable par f et ainsi $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in E_3(f)$.

□

Théorème 10 – Somme de deux sous-espaces propres

Si λ et μ deux valeurs propres distinctes,

Pour $f \in \mathcal{L}(E)$	Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$
alors les sous-espaces propres $E_\lambda(f)$ et $E_\mu(f)$ sont en somme directe.	alors les sous-espaces propres $E_\lambda(A)$ et $E_\mu(A)$ sont en somme directe.

□

Éléments de preuve:

En effet, si $\overrightarrow{x} \in E_\lambda(f) \cap E_\mu(f)$, on a $f\left(\overrightarrow{x}\right) = \lambda\overrightarrow{x}$ et $f\left(\overrightarrow{x}\right) = \mu\overrightarrow{x}$.

Donc $\lambda\overrightarrow{x} = \mu\overrightarrow{x}$ et par suite $(\lambda - \mu)\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$. Or $\lambda \neq \mu$, donc $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ ce qui assure le caractère somme directe.

Théorème 11 – Condition nécessaire et suffisante de diagonalisation

Pour $f \in \mathcal{L}(E)$ où $\dim(E) = n$

On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ toutes les valeurs propres distinctes de l'endomorphisme f.
Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

f est diagonalisable.

$$\underbrace{E = E_{\lambda_1}(f) \oplus E_{\lambda_2}(f) \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_k}(f)}_{E \text{ est somme directe des sous-espaces propres de } f}.$$

La somme des dimension des sous espaces propres de f vaut n : $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \dim\left(E_{\lambda_i}(f)\right) = n$.

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ toutes les valeurs propres distinctes de la matrice A.
Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

A est diagonalisable.

$$\underbrace{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = E_{\lambda_1}(A) \oplus E_{\lambda_2}(A) \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_k}(A)}_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \text{ est somme directe des sous-espaces propres de } f}.$$

La somme des dimension des sous espaces propres de A vaut n : $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \dim\left(E_{\lambda_i}(A)\right) = n$.

□

Exemple 15 – Diagonalisabilité d'une matrice

Pour $A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ on peut montrer que $\mathrm{sp}(A) = \{0, 2, 6\}$ et montrer que :

$$E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right) \qquad E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right) \qquad E_6(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$

On en déduit donc que : $\underbrace{\dim\left(E_0(A)\right)}_{=1} + \underbrace{\dim\left(E_2(A)\right)}_{=1} + \underbrace{\dim\left(E_6(A)\right)}_{=2} = 4$ et ainsi par théorème, la matrice A est diagonalisable.

□

12 . Cas particulier des matrices 2×2

Remarque – Rappel sur la trace et le déterminant

- Pour $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle trace de A noté $\mathrm{tr}(A)$ le réel défini par : $\mathrm{tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

  En d'autres termes, $\mathrm{tr}(A)$ est égal à la somme des termes diagonaux de A .
- Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on appelle déterminant de A le réel noté $\det(A)$ défini par : $\det(A) = ad - bc$.

  Par ailleurs, on a le résultat suivant : $(A \text{ est inversible}) \Leftrightarrow (\det(A) \neq 0)$

  et lorsque A est inversible, on a : $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

□

Théorème 12 – Valeurs propres d'une matrice 2×2

Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors : $(\lambda \in \mathrm{sp}(A)) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \lambda \text{ est solution de} \\ \text{l'équation } \lambda^2 - \mathrm{Tr}(A)\lambda + \det(A) = 0 \end{array} \right)$.

De plus, en notant Δ le discriminant de l'équation $\lambda^2 - \mathrm{Tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$, on a le résultat suivant :

Cas $\Delta < 0$

La matrice A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Cas $\Delta > 0$

La matrice A est diagonalisable.

Cas $\Delta = 0$

Soit la matrice A est déjà diagonale et dans ce cas elle est diagonalisable, soit la matrice A n'est pas diagonale et dans ce cas, elle n'est pas diagonalisable.

Dans le cas où la matrice A est diagonalisable, il reste à déterminer ses vecteurs propres pour pouvoir la diagonaliser.

□

Éléments de preuve:

Exemple 16 – Deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non diagonalisables

? Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

? Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

□

Application| [4726] **| 10| Diagonaliser une matrice** 2×2

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.

□

13. Diagonaliser une matrice

Contexte

Les éléments présentés dans ce paragraphe ont pour finalité de répondre à la question « diagonaliser la matrice A » qui consiste donc à trouver une matrice P inversible et une matrice diagonale D telle que $A = PDP^{-1}$.

□

Théorème 13 – Base de vecteurs propres

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable et $\mathrm{sp}(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ l'ensemble de ses valeurs propres.
Pour tout $i \in [\![1; p]\!]$, on note $\mathcal{B}_i$ une base du sous-espace propre $E_{\lambda_i}(A)$.

- La famille $\mathcal{B} = \underbrace{(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p)}_{\text{famille formée par la réunion des bases des sous-espaces propres}}$ est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, appelée base diagonalisante pour A.
- En notant P la matrice de passage de la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B}$, et D la matrice diagonale dont la diagonale est formée des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ comptées chacune avec leur ordre de multiplicité, on a : $A = PDP^{-1}$.

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} \overbrace{\qquad\quad}^{\text{Base de } E_{\lambda_1}(A)} & \overbrace{\qquad\quad}^{\text{Base de } E_{\lambda_2}(A)} & \cdots & \overbrace{\qquad\quad}^{\text{Base de } E_{\lambda_p}(A)} \end{array} \\
\text{P=} \begin{pmatrix} \qquad\quad & \qquad\quad & \qquad & \qquad\quad \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} \overbrace{\qquad\qquad}^{\text{Colonnes correspondants à la base de } E_{\lambda_1}(A)} & \overbrace{\qquad\qquad}^{\text{Colonnes correspondants à la base de } E_{\lambda_2}(A)} & \cdots & \overbrace{\qquad\qquad}^{\text{Colonnes correspondants à la base de } E_{\lambda_p}(A)} \end{array} \\
\text{D=} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & \lambda_2 & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & \lambda_p & \\ & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & \lambda_p \end{pmatrix}
\end{array}$$

□

Point méthode 4 – Diagonaliser une matrice

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Pour diagonaliser A :

Étape 1 - on cherche les valeurs propres de A

Étape 2 - on s'assure que A est diagonalisable

Étape 3 - on met en forme la base diagonalisante : après avoir trouvé une base [a] de chacun des sous-espaces propres, on écrit la matrice de passage P de la base canonique à la base diagonalisante, puis on met en forme la matrice diagonale D dont les termes diagonaux sont les valeurs propres de A, où λ_i est comptée $\dim(E_{\lambda_i}(A))$ fois.
L'ordre des vecteurs propres formant la base diagonalisante donne l'ordre dans lequel on inscrit les valeurs propres sur la diagonale de D.

□

a. il n'y a pas unicité d'une telle base et donc P ne sera pas unique

Exemple 17 – Diagonalisation d'une matrice

La matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ est diagonalisable puisque l'on a $\mathrm{sp}(A) = \{0, 2, 6\}$ avec :

$$\underbrace{\dim\left(E_0(A)\right)}_{=1} + \underbrace{\dim\left(E_2(A)\right)}_{=1} + \underbrace{\dim\left(E_6(A)\right)}_{=2} = \underbrace{\dim\left(\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})\right)}_{=4}$$

puisque les sous-espaces propres de A sont :

$$E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \qquad E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \qquad E_6(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

on en déduit que :

la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est telle que

$$A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} P^{-1}$$

□

14 . Diagonaliser un endomorphisme

Contexte

Les éléments présentés dans ce paragraphe ont pour finalité de répondre à la question « diagonaliser l'endomorphisme f » qui consiste donc à trouver une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.

□

Théorème 14 – Base de vecteurs propres par concaténation

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ que l'on sait diagonalisable et $\mathrm{sp}(f) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ l'ensemble de ses valeurs propres.
Pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, on note $\mathcal{B}_i$ une base du sous-espace propre $E_{\lambda_i}(f)$.
La famille $\mathcal{B} = \underbrace{(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_p)}_{\text{famille formée par la concaténation des bases des sous-espaces propres}}$ est une base de E formée de vecteurs propres de f, appelée base diagonalisante pour f.

□

Point méthode 5 – Diagonaliser un endomorphisme

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour diagonaliser f :

Étape 1 - on cherche les valeurs propres de f

Étape 2 - on s'assure que f est diagonalisable

Étape 3 - on met en forme la base diagonalisante : après avoir trouvé une base[a] de chacun des sous-espaces propres, on explicite complètement la base diagonalisante puis on écrit la matrice de f dans la diagonalisante qui est donc diagonale où les termes diagonaux sont les valeurs propres de f.
L'ordre des vecteurs propres formant la base diagonalisante donne l'ordre dans lequel on inscrit les valeurs propres sur la diagonale de D.

□

a. il n'y a pas unicité d'une telle base et donc la base diagonalisante ne sera pas unique