AL14

Changement de bases pour les endomorphismes

Version du 01-11-2022 à 19:17

1. Préambule

Introduction – Importance du choix d'une base

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y-z, -x+y-z, -x-y+z) \end{array} \right.$.

L'endomorphisme f est-il bijectif ?

On sait que : $\left(\begin{array}{c} \text{Un endomorphisme} \\ \text{est bijectif} \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \text{Une de ses représentations} \\ \text{matricielles est inversible} \end{array} \right)$

On détermine la matrice A dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ à l'aide de l'image des vecteurs de cette base par f :

$$\begin{array}{rcl} f((1,0,0)) & = & (1,-1,-1) \\ f((0,1,0)) & = & (-1,1,-1) \\ f((0,0,1)) & = & (-1,-1,1) \end{array}$$

Ainsi, la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est donc :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il reste à étudier l'inversibilité de la matrice A !

Or, les vecteurs $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,-1,0)$ et $v_3 = (1,-1,0)$ forment une base $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
On détermine la matrice B de f dans la base $\mathcal{C}$ en 'eterminant les images par f des vecteurs de cette base :

$$\begin{array}{rcl} f(v_1) & = & f((1,1,1)) \\ & = & (-1,-1,-1) \\ & = & -v_1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f(v_2) & = & f((1,-1,0)) \\ & = & (2,-2,0) \\ & = & 2v_2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f(v_3) & = & f((1,0,-1)) \\ & = & (2,0,-2) \\ & = & 2v_3 \end{array}$$

Ainsi, la matrice B de f dans $\mathcal{C}$ est alors $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Cette matrice est une matrice diagonale dont tous les termes diagonaux sont non nuls. Par théorème cette matrice est inversible, ce qui assure le caractère bijectif de l'endomorphisme f.

Mais comment a-t-on trouvé cette base $\mathcal{C}$ et existe-t-il un lien entre les deux matrices A et B ?

$\square$

Contexte

Dans tout ce qui suit :

- m, n, p et q désigneront des éléments de $\mathbb{N}^*$;
- E désignera un $\mathbb{R}$−espace vectoriel de dimension finie qui pourra être $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[x]$ ou $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

On considère $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{C} = (e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases de E.

□

2. Matrice de passage

Définition 1 – Matrice de passage

On appelle **matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$** la matrice $P_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_1, \ldots, e'_n)$.
Il s'agit de la matrice formée par les coordonnées écrites en colonnes des vecteurs $(e'_1, \ldots, e'_n)$ exprimés dans la base $\mathcal{B}$.

Écrire une matrice de passage

Pour écrire la matrice de passage de la base $\underbrace{\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)}_{\text{ancienne base}}$ à la base $\underbrace{\mathcal{C} = (e'_1, \ldots, e'_n)}_{\text{nouvelle base}}$ on écrit en colonnes les coordonnées des vecteurs $(e'_1, \ldots, e'_n)$ que l'on a exprimés dans la base $\mathcal{B}$.

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e'_1 & e'_2 & \cdots & e'_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ e_n \end{array}$$

Illustration

On note $\mathcal{B} = ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On admet que la famille $\mathcal{C} = ((1,1,1), (1,-1,0), (1,0,-1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ est alors $P_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

□

Théorème 1 – Caractère inversible

(1). La matrice de l'application identité $\mathrm{Id}_E : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$ dans les bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$ est la matrice de passage $P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$.

(2). La matrice de passage $P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$ est inversible et on a : $(P_{\mathcal{B}\mathcal{C}})^{-1} = P_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$.

□

Éléments de preuve:

(1). La matrice de Id_E dans les bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$ se construit en déterminant les images par Id_E des vecteurs $(e'_1, \ldots, e'_n)$ de la base $\mathcal{C}$ que l'on exprime ensuite en fonction des vecteurs $(e_1, \ldots, e_n)$ de la base $\mathcal{B}$.

(2). Puisque $P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ est la matrice de l'application identié de E qui est bijective, par théorème, la matrice $P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ est inversible.

Proposition 1 – Formule de changement de base - Vecteur

Soit $x \in E$, dont on note $X_{\mathcal{B}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $X_{\mathcal{C}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(x)$ ses représentations matricielles dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.
Alors : $\underbrace{X_{\mathcal{B}}}_{\substack{\text{Coordonnées dans} \\ \text{l'ancienne base}}} = P_{\mathcal{B}\mathcal{C}} \times \underbrace{X_{\mathcal{C}}}_{\substack{\text{Coordonnées dans} \\ \text{la nouvelle base}}}$

En d'autres termes $P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ permet d'aller de la nouvelle base à l'ancienne base.

□

3. Formule changement de base pour les endomorphismes

Théorème 2 – Changement de base pour les endomorphismes

Soit f un endomorphisme de E où l'on note $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$. On a alors : $\boxed{B = (P_{\mathcal{BC}})^{-1} \times A \times P_{\mathcal{BC}}}$

Version simplifiée des formules de changement de base

On note simplement $P = P_{\mathcal{BC}}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$:

(1). En notant $X = X_{\mathcal{B}}$ et $X' = X_{\mathcal{C}}$ les matrices de $x \in E$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, on a $\boxed{X = PX'}$.

(2). En notant $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$ les matrices de $f \in \mathcal{L}(E)$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, on a $\boxed{B = P^{-1}AP}$. □

Éléments de preuve:

$$\begin{tikzcd}
(E,\mathcal{B}) \arrow[r, "\mathrm{Mat}_{\mathcal{BB}}(f)"] \arrow[d, "\mathrm{Mat}_{\mathcal{BC}}(\mathrm{Id}_E)"'] & (E,\mathcal{B}) \\
(E,\mathcal{C}) \arrow[r, "\mathrm{Mat}_{\mathcal{CC}}(f)"'] & (E,\mathcal{C}) \arrow[u, "\mathrm{Mat}_{\mathcal{CB}}(\mathrm{Id}_E)"']
\end{tikzcd}$$

En interprêtant matriciellement cette composition :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{BC}}(f) = \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{CB}}(\mathrm{Id}_E)}_{P_{\mathcal{BC}}} \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{CC}}(f) \times \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{BC}}(\mathrm{Id}_E)}_{P_{\mathcal{CB}}=(P_{\mathcal{BC}})^{-1}}$$

qui donnera $A = P_{\mathcal{BC}} \times B \times (P_{\mathcal{BC}})^{-1}$
Puis finalement $B = (P_{\mathcal{BC}})^{-1} \times A \times P_{\mathcal{BC}}$.

Autre justification :

Pour deux vecteurs x et y de E, on a : $\begin{cases} X_{\mathcal{B}} &= P_{\mathcal{BC}} \times X_{\mathcal{C}} \\ Y_{\mathcal{B}} &= P_{\mathcal{BC}} \times Y_{\mathcal{C}} \end{cases}$.
Or on a : $(y = u(x)) \Leftrightarrow (Y_{\mathcal{B}} = A \times X_{\mathcal{B}})$.
On en déduit alors la relation :

$$P_{\mathcal{BC}} \times Y_{\mathcal{C}} = A \times P_{\mathcal{BC}} \times X_{\mathcal{C}}$$

Ainsi : $(y = u(x)) \Leftrightarrow \left(Y_{\mathcal{C}} = \underbrace{(P_{\mathcal{BC}})^{-1} \times A \times P_{\mathcal{BC}}}_{\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)} \times X_{\mathcal{C}} \right)$.

Application|[4719]| 1| Changement de base pour un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$ défini par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[x] \\ ax^2 + bx + c & \longmapsto & (3c - b + a) + (2c + a)x + ax^2 \end{array} \right.$$

On rappelle que la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ est $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$.

(1). Montrer que la famille $\mathcal{C} = (1 + x - x^2, x + x^2, 1 + x)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

(2). Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.

(3). En déduire la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$. □