AL13

Projecteurs et symétries

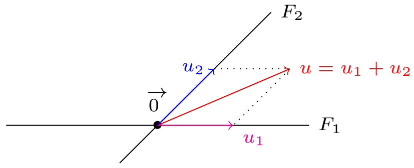
Version du 01-11-2022 à 19:16

Contexte

Dans tout ce qui suit :

- m, n, p et q désigneront des éléments de $\mathbb{N}^*$;
- E désignera un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie qui pourra être $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[x]$ ou $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

On rappelle que si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces supplémentaires de E, pour tout $u \in E$, il existe un unique couple $(u_1, u_2) \in F_1 \times F_2$ tel que $u = u_1 + u_2$.



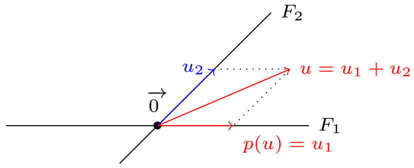
□

1 . Projecteurs

Définition 1 – Projecteur

Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces supplémentaires de E. On appelle **projecteur sur** F_1 **de direction** F_2 l'application p définie par :

$$p : \left| \begin{array}{ccc} E = F_1 \oplus F_2 & \longrightarrow & E \\ u = u_1 + u_2 & \longmapsto & p(u) = u_1 \end{array} \right.$$



□

Théorème 1 – Caractère linéaire d'un projecteur

Si p est un projecteur de E, alors p est un endomorphisme de E .

□

Éléments de preuve:

Théorème 2 – Caractérisation d'un projecteur

On suppose que p est un endomorphisme de E. Alors : $\quad (p \text{ est un projecteur}) \quad \Leftrightarrow \quad (p \circ p = p)$.

□

Éléments de preuve:

Supposons que p soit un projecteur de E sur un sous-espace F_1 de direction F_2 : montrons que $p \circ p = p$, c'est à dire que que : $\forall u \in E,\ p(p(u)) = p(u)$.

En notant $u = u_1 + u_2$ où $(u_1, u_2) \in F_1 \times F_2$ est l'unique décomposition de u sur $F_1 + F_2$, on a :

Supposons que p soit un endomorphisme de E tel que $p \circ p = p$: montrons qu'il existe deux sous-espaces supplémentaires de E tels que p est le projecteur sur F_1 parallèlement à F_2.

Soit alors $u \in E$. On remarque que $u = (u - p(u)) + \underbrace{p(u)}_{\in \mathrm{Im}\,(u)}$.

Point méthode 1 – Reconnaître un projecteur

Pour montrer qu'un endomorphisme f de E est un projecteur, on doit donc établir que : $\forall u \in E, \quad f(f(u)) = f(u)$.
On pourra adopter la rédaction suivante :

D'après la caractérisation des projecteurs, on sait que :

$$(f \in \mathcal{L}(E) \text{ est un projecteur}) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall u \in E,\ f(f(u)) = f(u))$$

Or on a : $\quad \forall u \in E, \quad f(f(u)) = \ldots$

$$\vdots$$

$$= f(u)$$

Ainsi, f est bien un projecteur.

□

Application| [4717] | **1| Projecteur de $\mathbb{R}^2$**

Montrer que l'application linéaire $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x+y}{2}\right) \end{array}\right.$ est un projecteur de $\mathbb{R}^2$.

□

Proposition 1 – Éléments caractéristiques d'un projecteur

Si p est un projecteur de E, alors p est le projecteur sur $\mathrm{Im}\,(p)$ de direction $\mathrm{Ker}\,(p)$.
On dit aussi que $\mathrm{Im}\,(p)$ est l'ensemble des vecteurs invariants par p.

□

Éléments de preuve:
Le projecteur f sur $\mathrm{Im}\,(p)$ de direction $\mathrm{Ker}\,(p)$ est par définition : $f : \left|\begin{array}{ccc} E = \mathrm{Im}\,(p) \oplus \mathrm{Ker}\,(p) & \longrightarrow & E \\ u = u_1 + u_2 & \longmapsto & f(u) = u_1 \end{array}\right.$.
Montrons que $f = u$, c'est à dire que : $\forall u \in E,\ p(u) = f(u)$.
Soit alors $u \in E = \mathrm{Im}\,(p) \oplus \mathrm{Ker}\,(p)$. Il existe donc un unique $(u_1, u_2) \in \mathrm{Im}\,(p) \times \mathrm{Ker}\,(p)$ tel que $u = u_1 + u_2$.

Proposition 2 – Image d'un projecteur

Si p est un projecteur de E, alors $\mathrm{Im}\,(p) = \mathrm{Ker}\,(p - \mathrm{Id}_E)$ où $\mathrm{Id}_E : \left|\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & u \end{array}\right.$.

□

Éléments de preuve:

Application|[1414]| 2| Projecteurs de $\mathbb{R}^3$

Soit $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $v_1 + v_2 + v_3 = 1$.
On considère l'application linéaire :

$$\Phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ x = (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & \Phi(x) = x - (x_1 + x_2 + x_3)\, v \end{array} \right.$$

(1). Démontrer que Φ est un projecteur.

(2). Déterminer les éléments caractéristiques de Φ.

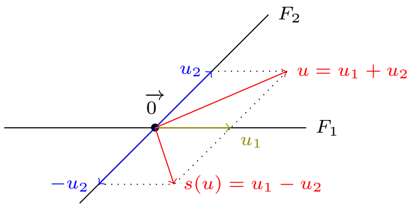
□

2. Symétrie

Définition 2 – Symétrie

Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces supplémentaires de E.
On appelle **symétrie par rapport à F_1 de direction F_2** l'application s définie par :

$$p : \left| \begin{array}{ccc} E = F_1 \oplus F_2 & \longrightarrow & E \\ u = u_1 + u_2 & \longmapsto & s(u) = u_1 - u_2 \end{array} \right.$$



Théorème 3 – Caractère linéaire d'une symétrie

Si s est une symétrie de E, alors s est un endomorphisme de E.

Éléments de preuve:

Théorème 4 – Caractérisation d'une symétrie

On suppose que s est un endomorphisme de E. Alors : $(s$ est une symétrie$)$ $\Leftrightarrow$ $(s \circ s = \mathrm{Id}_E)$.

Éléments de preuve:

Supposons que s soit une symétrie de E par rapport à un sous-espace F_1 de direction F_2 : montrons que $s \circ s = s$, c'est à dire que que : $\forall u \in E,\ s(s(u)) = u$.
En notant $u = u_1 + u_2$ où $(u_1, u_2) \in F_1 \times F_2$ est l'unique décomposition de u sur $F_1 + F_2$, on a :

Supposons que s soit un endomorphisme de E tel que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$: montrons qu'il existe deux sous-espaces supplémentaires de E tels que s est la symétrie par rapport à F_1 parallèlement à F_2.
Soit alors $u \in E$. On remarque que $u = \dfrac{1}{2}(u + s(u)) + \dfrac{1}{2}(u - s(u))$.

Point méthode 2 – Reconnaître une symétrie

Pour montrer qu'un endomorphisme f de E est une symétrie, on doit donc établir que : $\forall u \in E, \quad f(f(u)) = u$.
On pourra adopter la rédaction suivante :

D'après la caractérisation des projecteurs, on sait que :

$$(f \in \mathcal{L}(E) \text{ est une symétrie}) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall u \in E,\ f(f(u)) = u)$$

Or on a : $\quad \forall u \in E, \quad f(f(u)) \ = \ \dots$

$$\vdots$$

$$= \ u$$

Ainsi, f est bien une symétrie.

$\square$

Application| [4718] | 3| Symétrie de $\mathbb{R}^2$

Montrer que l'application linéaire $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (-7x+2y, -24x+7y) \end{array} \right.$

est une symétrie de $\mathbb{R}^2$.

$\square$

Proposition 3 – Éléments caractéristiques d'une symétrie

Si s est une symétrie de E, alors s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}\ (s - \mathrm{Id}_E)$ de direction $\mathrm{Ker}\ (s + \mathrm{Id}_E)$.
On dit aussi que $\mathrm{Ker}\ (s - \mathrm{Id}_E)$ est l'ensemble des vecteurs invariants par s et $\mathrm{Ker}\ (s + \mathrm{Id}_E)$ est l'ensemble des vecteurs transformés en leur opposé par s.

$\square$

Éléments de preuve:
La symétrie f par rapport à $\mathrm{Ker}\ (s - \mathrm{Id}_E)$ de direction $\mathrm{Ker}\ (s + \mathrm{Id}_E)$ est par définition :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} E = \mathrm{Ker}\ (s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\ (s + \mathrm{Id}_E) & \longrightarrow & E \\ u = u_1 + u_2 & \longmapsto & f(u) = u_1 - u_2 \end{array} \right.$$

Montrons que $f = u$, c'est à dire que : $\quad \forall u \in E,\ s(u) = f(u)$.
Soit alors $u \in E = \mathrm{Ker}\ (s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\ (s + \mathrm{Id}_E)$. Il existe donc un unique $(u_1, u_2) \in \mathrm{Ker}\ (s - \mathrm{Id}_E) \times \mathrm{Ker}\ (s + \mathrm{Id}_E)$ tel que $u = u_1 + u_2$.

Théorème 5 – Caractère bijectif d'une symétrie

Si s est une symétrie de E, alors s est bijective.

$\square$

Éléments de preuve:

3. Traduction matricielle des propriétés caractéristiques

Contexte

Dans ce paragraphe, on désigne par $\mathcal{B}$ une base de E et f est un endomorphisme de E, et on note $n = \dim(E)$. On note alors A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, c'est à dire $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

□

Théorème 6 – Caractération matricielle

Caractérisation matricielle d'un projecteur	Caractérisation matricielle d'une symétrie
(f est un projecteur) $\Leftrightarrow$ ($A \times A = A$)	(f est une symétrie) $\Leftrightarrow$ ($A \times A = \mathrm{I}_n$)

□

Point méthode 3 – Identifier un projecteur ou une symétrie à partir d'une représentation matricielle

Pour montrer qu'un endomorphisme de E dont on connaît la matrice A dans une base est un projecteur ou une symétrie, il suffit de déterminer A^2 et de regarder si $A^2 = A$ pour un projecteur ou si $A^2 = \mathrm{I}_n$ pour une symétrie.
On pourra adopter la rédaction suivante :

> D'après la caractérisation matricielle des projecteurs/symétries :
>
> $$\left(f \in \mathcal{L}(E) \text{ est un projecteur/symétrie} \right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(A^2 = A/\mathrm{I}_n \right)$$
>
> Par un calcul direct, on a que :
>
> $$\begin{pmatrix} & (A) & \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} & (A) & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & (A) \text{ ou } \mathrm{I}_n \text{ ou } \dots & \end{pmatrix}$$
>
> et ainsi, f est bien un projecteur/symétrie.

□

Exemple 1 – Nature d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

? f est-il un projecteur ? une symétrie ?

□

4. Base adaptée et représentation matricielle

Théorème 7 – Matrice dans une base adaptée

Matrice d'un projecteur dans une base adaptée

On suppose que p un projecteur de E sur F_1 de direction F_2 et on note $\mathcal{B}$ une base adaptée à la somme directe $E = F_1 \oplus F_2$.

Alors la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \overbrace{\hphantom{xxxxxx}}^{\text{Image de la base de } F_1} & \overbrace{\hphantom{xxxxxx}}^{\text{Image de la base de } F_2} \end{array} \\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = & \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\ \ddots \\ 1\end{matrix}}\right\} \text{Base de } F_1 \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\ \ddots \\ 0\end{matrix}}\right\} \text{Base de } F_2 \end{array} \end{array}$$

Matrice d'une symétrie dans une base adaptée

On suppose que s une symétrie de E par rapport à F_1 de direction F_2 et on note $\mathcal{B}$ une base adaptée à la somme directe $E = F_1 \oplus F_2$.

Alors la matrice de s dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \overbrace{\hphantom{xxxxxx}}^{\text{Image de la base de } F_1} & \overbrace{\hphantom{xxxxxx}}^{\text{Image de la base de } F_2} \end{array} \\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = & \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\ \ddots \\ 1\end{matrix}}\right\} \text{Base de } F_1 \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\ \ddots \\ 0\end{matrix}}\right\} \text{Base de } F_2 \end{array} \end{array}$$

□

Exemple 2 – Exploitation de la forme adaptée

On désigne par p le projecteur sur $F_1 = \mathrm{Vect}\,((1,0,1),(0,1,-1))$ de direction $F_2 = \mathrm{Vect}\,((1,-1,1))$.

? Déterminer la matrice A de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

□

Éléments de réponse:

D'après le théorème de concaténation des bases pour les sous-espaces supplémenataires, la famille $\mathcal{B} = ((1,0,1),(0,1,-1),(1,-1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ adaptée à la somme directe $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2$ permettant de définir p.

Par suite la matrice B de p dans la base $\mathcal{B}$ est : $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

En notant $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}$, d'après la formule de changement de bases pour les endomorphismes, on a que $B = Q^{-1}AQ$ c'est à dire que $A = QBQ^{-1}$.

Puisque $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, on en déduit alors que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Lien projecteur et symétrie

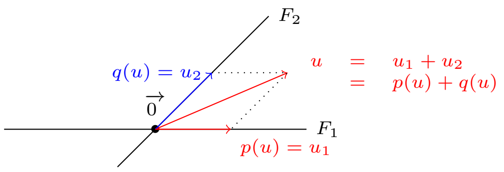
Proposition 4 – Relations projecteurs/symétrie

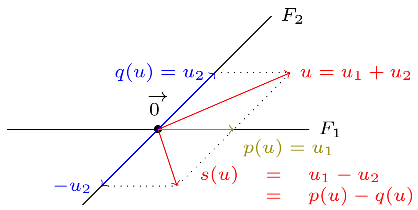
Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces supplémentaires de E.
On désigne par :

- p le projecteur sur F_1 de direction F_2 ;
- q le projecteur sur F_2 de direction F_1 ;
- s la symétrie par rapport à F_1 de direction F_2.

On a alors que : $\forall u \in E, \begin{cases} p(u)+q(u) &= u \\ s(u) &= 2p(u)-u \end{cases}$

Ces deux relations s'écrivent aussi : $p+q = \mathrm{Id}_E$ et $s = 2p - \mathrm{Id}_E$.





□

Éléments de preuve:

Application| [4720] **| 4| Projecteur et symétrie**

On considère l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x+y}{2}\right) \end{array}$.

(1). Montrer que f est le projecteur sur $F_1 = \mathrm{Vect}\,((1,1))$ de direction $F_2 = \mathrm{Vect}\,((1,-1))$.

(2). En déduire l'expression analytique de la symétrie par rapport à F_1 de direction F_2.

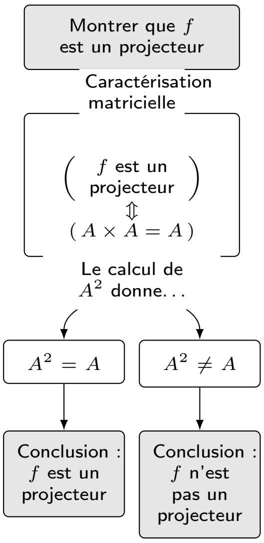
□

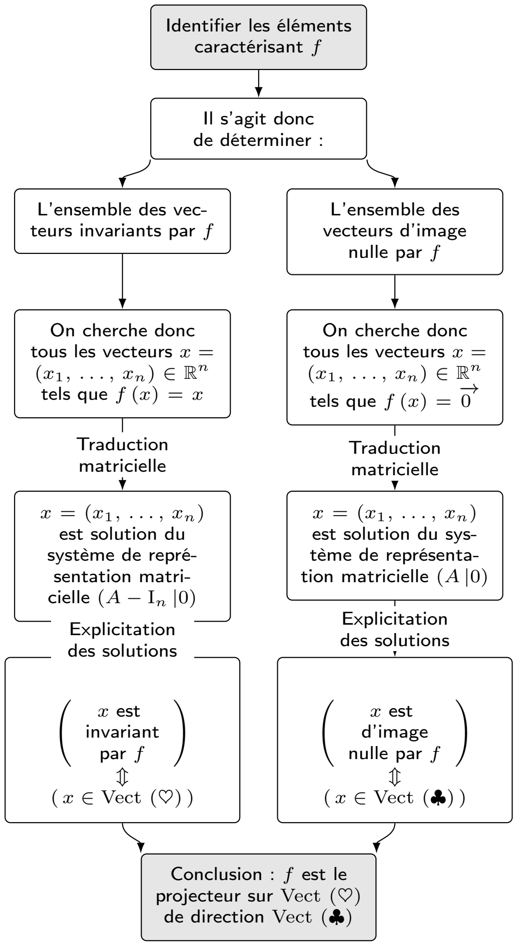
6. Plan d'étude d'un projecteur de $\mathbb{R}^n$ donné par sa matrice

Point méthode 4 – Montrer qu'un endomorphisme est un projecteur et le caractériser

?

Pour $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ telle que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ où $\mathcal{B}$ base canonique de $\mathbb{R}^n$, on souhaite :





On peut adopter la rédaction suivante :
La caractérisation des projecteurs se traduit matriciellement par :

$$(f \in \mathcal{L}(E) \text{ est un projecteur}) \quad \Leftrightarrow \quad \left(A^2 = A\right)$$

Par un calcul direct, on a que $A^2 = A$ et ainsi, f est bien un projecteur.
Par ailleurs, en notant :

$$F_1 = \{\text{vecteurs invariants par } f\}$$

$$F_2 = \mathrm{Ker}\,(f)$$

on sait que f est le projecteur sur F_1 de direction F_2.

Détermination de F_1 :

$$(x = (x_1, \dots, x_n) \in F_1) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{c} (x_1, \dots, x_n) \text{ est solution} \\ \text{du système de} \\ \text{représentation} \\ \text{matricielle } (A - \mathrm{I}_n \,|\, 0) \end{array} \right)$$

On a : $(A - \mathrm{I}_n \,|\, 0) \sim_L \dots \sim_L \dots$

Par conséquent, on en déduit que : $F_1 = \mathrm{Vect}\,(\heartsuit)$

Détermination de F_2 :

$$(x = (x_1, \dots, x_n) \in F_2) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{c} (x_1, \dots, x_n) \text{ est solution} \\ \text{du système de} \\ \text{représentation} \\ \text{matricielle } (A \,|\, 0) \end{array} \right)$$

On a : $(A \,|\, 0) \sim_L \dots \sim_L \dots$

Par conséquent, on en déduit que : $F_2 = \mathrm{Vect}\,(\clubsuit)$

Conclusion :

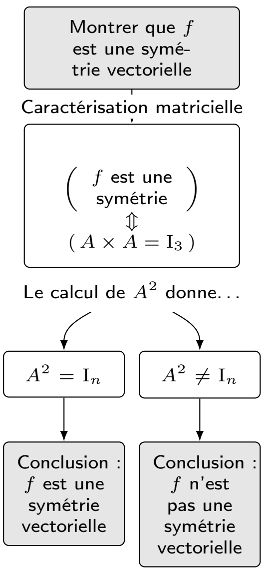
$\boxed{f \text{ est le projecteur sur } \mathrm{Vect}\,(\heartsuit) \text{ de direction } \mathrm{Vect}\,(\clubsuit)}$

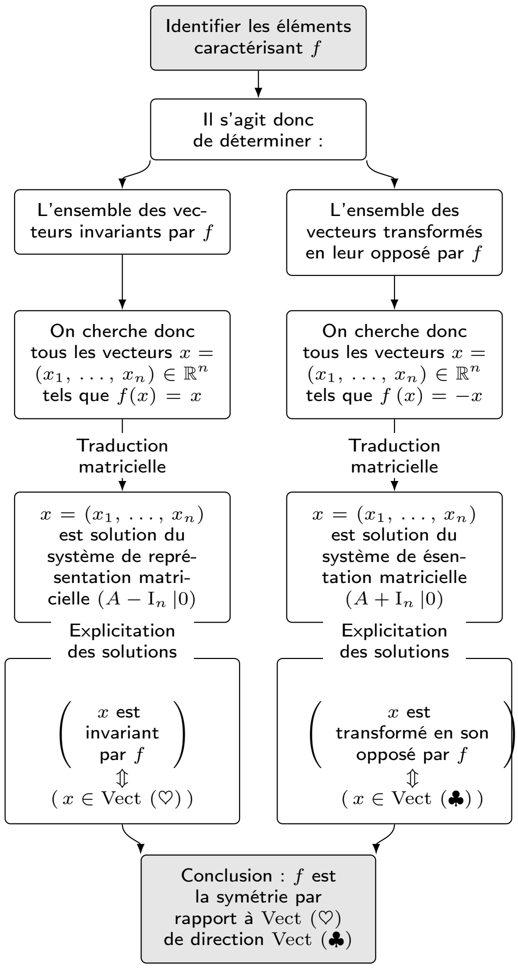
□

7. Plan d'étude d'une symétrie de $\mathbb{R}^n$ donnée par sa matrice

Point méthode 5 – Montrer qu'un endomorphisme est une symétrie et la caractériser

? Pour $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ telle que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ où $\mathcal{B}$ base canonique de $\mathbb{R}^n$, on souhaite :





On peut adopter la rédaction suivante :
La caractérisation des symétries se traduit matriciellement par :

$$(f \in \mathcal{L}(E) \text{ est une symétrie,}) \quad \Leftrightarrow \quad \left(A^2 = \mathrm{I}_n\right)$$

Par un calcul direct, on a que $A^2 = \mathrm{I}_n$ et ainsi, f est bien une symétrie.
Par ailleurs, en notant :

$$F_1 = \{\text{vecteurs invariants par } f\}$$

$$F_2 = \{\text{vecteurs transformés en leur opposés par } f\}$$

on sait que f est la symétrie vectorielle par rapport à F_1 de direction F_2.

Détermination de F_1 :

$$(x = (x_1, \dots, x_n) \in F_1) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{c} (x_1, \dots, x_n) \text{ est solution} \\ \text{du système de} \\ \text{représentation} \\ \text{matricielle } (A - \mathrm{I}_n \,|\, 0) \end{array} \right)$$

On a : $(A - \mathrm{I}_n \,|\, 0) \sim_L \dots \sim_L \dots$

Par conséquent, on en déduit que : $F_1 = \mathrm{Vect}(\heartsuit)$

Détermination de F_2 :

$$(x = (x_1, \dots, x_n) \in F_2) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{c} (x_1, \dots, x_n) \text{ est solution} \\ \text{du système de} \\ \text{représentation} \\ \text{matricielle } (A + \mathrm{I}_n \,|\, 0) \end{array} \right)$$

On a : $(A + \mathrm{I}_n \,|\, 0) \sim_L \dots \sim_L \dots$

Par conséquent, on en déduit que : $F_2 = \mathrm{Vect}(\clubsuit)$

Conclusion :

$\boxed{f \text{ est la symétrie par rapport à } \mathrm{Vect}(\heartsuit) \text{ de direction } \mathrm{Vect}(\clubsuit)}$

□