AL12

Sommes de sous-espaces vectoriels

Version du 01-11-2022 à 19:15

Contexte

Dans tout ce qui suit :
- m, n, p et q désigneront des éléments de $\mathbb{N}^*$;
- E désignera un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie qui pourra être $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[x]$ ou $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

□

1. Somme de sous-espaces vectoriel

Théorème 1 – Somme de deux sous-espaces

Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.
L'ensemble $\{f_1 + f_2,\ (f_1, f_2) \in F_1 \times F_2\}$ est un sous-espace vectoriel de E, appelé somme des deux sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 et noté $F_1 + F_2$.

$$(u \in F_1 + F_2) \quad \Leftrightarrow \quad (\text{il existe } (f_1, f_2) \in F_1 \times F_2,\ u = f_1 + f_2)$$

□

Éléments de preuve:

Théorème 2 – Formule de Grassman

Si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors $F_1 + F_2$ est de dimension finie et on a :

Formule de Grassman : $\dim(F_1+F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(F_1 \cap F_2)$

□

Exemple 1 – Détermination de la somme de deux sous-espaces de $\mathbb{R}^3$

Soient $F_1 = \text{Vect}\,((1,1,1))$ et $F_2 = \text{Vect}\,((1,0,1))$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
L'ensemble F_1+F_2 est par définition : $F_1+F_2 = \{f_1+f_2,\ (f_1,f_2) \in F_1 \times F_2\}$.

? Donner une caractérisation des éléments de F_1+F_2.

□

Éléments de réponse:
Par définition de F_1, on a : $(f_1 \in F_1) \Leftrightarrow$ (il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f_1 = \alpha\,(1,1,1)$).
De même : $(f_2 \in F_2) \Leftrightarrow$ (il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $f_2 = \beta\,(1,0,1)$).

Ainsi :
$$\begin{aligned}
(u=(x,y,z) \in F_1+F_2) &\Leftrightarrow \left(\text{il existe } (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ u = \underbrace{\alpha\,(1,1,1)}_{\in F_1} + \underbrace{\beta\,(1,0,1)}_{\in F_2}\right)\\
&\Leftrightarrow \left(\text{il existe } (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ u = (\alpha+\beta, \alpha, \alpha+\beta)\right)\\
&\Leftrightarrow \left(\text{il existe } (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{ccccc} \alpha & + & \beta & = & x \\ \alpha & & & = & y \\ \alpha & + & \beta & = & z \end{array}\right.\right)
\end{aligned}$$

Un échelonnement en ligne du système $\left\{\begin{array}{ccccc} \alpha & + & \beta & = & x \\ \alpha & & & = & y \\ \alpha & + & \beta & = & z \end{array}\right.$ d'inconnue le couple de réels (α,β) donne :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \alpha & + & \beta & = & x \\ \alpha & & & = & y \\ \alpha & + & \beta & = & z \end{array}\right. \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{ccccc} \alpha & & & = & y \\ \alpha & + & \beta & = & x \\ \alpha & + & \beta & = & z \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{ccc} \alpha & = & y \\ \beta & = & x-y \\ \beta & = & z-y \end{array}\right. \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{ccccc} \alpha & & & = & y \\ \alpha & + & \beta & = & x-y \\ & & 0 & = & z-x \end{array}\right.$$

Ce système présente donc une équation de compatibilité qui est $z-x=0$.
On en déduit donc que : $(u=(x,y,z) \in F_1+F_2) \Leftrightarrow (z-x=0)$
Par suite, on a : $F_1+F_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ z-x=0\right\}$.

Application| [4713] | 1| Somme de deux sous-espaces de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

On considère $F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$ et $F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & a+b \\ 0 & a \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

(1). Montrer que F_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

(2). Donner une caractérisation des éléments de $F_1 + F_2$.

□

Proposition 1 – Généralisation à p sous-espaces

Soient F_1, F_2, …, F_p des sous-espaces vectoriels de E.
L'ensemble $F = \{f_1 + f_2 + \ldots + f_p, (f_1, f_2, \ldots, f_p) \in F_1 \times F_2 \times \ldots F_p\}$ est un sous-espace vectoriel de E, appelé **somme des p sous-espaces vectoriels F_1, F_2, …F_p** et noté $F_1 + F_2 + \ldots F_p$.

□

Éléments de preuve:

$F \subset E$ **:** en effet par construction un élément de F est un élément de E.

Le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ de E appartient à F : en effet puisque pour tout $i \in [\![1; p]\!]$, F_i est un sous-espace de E, $\overrightarrow{0} \in F_i$, et par suite comme $\overrightarrow{0} = \underbrace{\overrightarrow{0}}_{\in F_1} + \underbrace{\overrightarrow{0}}_{\in F_2} + \ldots + \underbrace{\overrightarrow{0}}_{\in F_p}$, on a bien $\overrightarrow{0} \in F$.

F est stable par combinaison linéaire : soient $(x, y) \in F \times F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Puisque $x \in F$, il existe $(x_1, \ldots, x_p) \in F_1 \times \ldots \times F_p$ et $(y_1, \ldots, y_p) \in F_1 \times \ldots \times F_p$ tels que $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_p$ et $y = y_1 + y_2 + \ldots + y_p$.
En posant $z = \lambda x + y$, on a :

$$\begin{array}{rcl} z & = & \lambda(x_1 + \ldots + x_p) + y_1 + \ldots + y_p \\ & = & \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda x_p + y_1 + \ldots + y_p \\ & \underset{\substack{F_i \text{ s.e.v. de } E \\ \text{donc stable par C.L.}}}{=} & \underbrace{\lambda x_1 + y_1}_{\in F_1} + \ldots + \underbrace{\lambda x_p + y_p}_{\in F_p} \end{array}$$

et donc $z \in F$, c'est à dire $\lambda x + y \in F$.

2. Somme directe de deux sous-espaces et caractérisation

Définition 1 – Somme directe

Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.
On dit que la somme $F_1 + F_2$ est directe lorsque tout élément de $F_1 + F_2$ se décompose de **manière unique** comme somme d'un élément de F_1 et d'un élément de F_2.
Lorsque c'est le cas, on écrira cette somme de sous-espaces $F_1 \oplus F_2$.

$$(\text{La somme } F_1 + F_2 \text{ est directe}) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{c} \text{Pour tout } u \in F_1 + F_2, \\ \text{il existe un unique } (f_1, f_2) \in F_1 \times F_2 \\ \text{tel que : } \quad u = f_1 + f_2 \end{array} \right)$$

□

Exemple 2 – Somme directe dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

On admet que $F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$ et $F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$ sont deux sous-espaces de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Montrer que la somme $F_1 + F_2$ est directe.

□

Éléments de réponse:
Montrons que tout élément de $F_1 + F_2$ se décompose de manière unique comme somme d'un élément de F_1 et d'un élément de F_2.
Soit alors $M \in F_1 + F_2$ et supposons que l'on ait deux décompositions de M sur $F_1 + F_2$, c'est à dire que $M = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix}}_{\in F_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ -a_2 & 0 \end{pmatrix}}_{\in F_2}$ et $M = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1' & b_1' \\ b_1' & c_1' \end{pmatrix}}_{\in F_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a_2' \\ -a_2' & 0 \end{pmatrix}}_{\in F_2}$. Par opération sur les matrices il vient donc que $M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 + a_2 \\ b_1 - a_2 & c_1 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} a_1' & b_1' + a_2' \\ b_1' - a_2' & c_1' \end{pmatrix}$.

Par identification des coefficients, on a : $\left\{ \begin{array}{rcl} a_1 & = & a_1' \\ b_1 + a_2 & = & b_1' + a_2' \\ b_1 - a_2 & = & b_1' - a_2' \\ c_1 & = & c_1' \end{array} \right.$. Le sous-système de conditions $\left\{ \begin{array}{rcl} b_1 + a_2 & = & b_1' + a_2' \\ b_1 - a_2 & = & b_1' - a_2' \end{array} \right.$ donne :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} b_1 + a_2 & = & b_1' + a_2' \\ b_1 - a_2 & = & b_1' - a_2' \end{array} \right. \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcl} b_1 + a_2 & = & b_1' + a_2' \\ -2a_2 & = & -2a_2' \end{array} \right.$$

$$\underset{L_2 \leftarrow -\frac{1}{2} L_2}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcl} b_1 + a_2 & = & b_1' + a_2' \\ a_2 & = & a_2' \end{array} \right. \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcl} b_1 & = & b_1' \\ a_2 & = & a_2' \end{array} \right.$$

Par suite, on a $\left\{ \begin{array}{rcl} a_1 & = & a_1' \\ b_1 & = & b_1' \\ a_2 & = & a_2' \\ c_1 & = & c_1' \end{array} \right.$ ce qui assure l'unicité de la décomposition de M sur la somme $F_1 + F_2$.

Remarque 1 – Raisonnement par analyse-synthèse

On sera parfois amené à effectuer un raisonnement par analyse-syntèse pour obtenir la décomposition d'un vecteur quelconque de $F_1 + F_2$ pour montrer que cette somme est directe.
On rappelle que ce raisonnement s'effectue en « deux temps » :

Analyse (condition nécessaire) : on commence par supposer que l'on connait/dispose d'une décomposition sur $F_1 + F_2$ et on en déduit des conditions sur les différents éléments constituant cette décomposition.

Synthèse (condition suffisante) : on montre que si un objet vérifie ces conditions, alors il appartient bien à $F_1 + F_2$.

Application| [3899] | **2| Somme directe dans $\mathbb{R}_2[x]$**

On admet $F_1 = \left\{P \in \mathbb{R}_2[x],\ \int_0^1 tP(t)\,\mathrm{d}t = 0\right\}$.

(1). Montrer que F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[x]$.

(2). Montrer que F_1 et $F_2 = \mathrm{Vect}\ (x \longmapsto x)$ sont en somme directe.

□

Théorème 3 – Caractérisation d'une somme directe

Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.

$$\text{(La somme } F_1+F_2 \text{ est directe)} \quad \Leftrightarrow \quad \left(F_1\cap F_2=\left\{\overrightarrow{0}\right\}\right)$$

□

Éléments de preuve: Démontrons ce résultat par double implication.

Supposons que la somme F_1+F_2 est directe : $F_1\cap F_2$ est par théorème un sous-espace vectoriel de E, donc contient le vecteur nul de E. Montrons alors que c'est le seul élément de $F_1\cap F_2$.
Soit alors $u\in F_1\cap F_2$.
On peut écrire que : $u=\underbrace{u}_{\in F_1\cap F_2\subset F_1}+\underbrace{\overrightarrow{0}}_{\in F_2}$.
Mais on peut aussi écrire que : $u=\underbrace{\overrightarrow{0}}_{\in F_1}+\underbrace{u}_{\in F_1\cap F_2\subset F_2}$.
Par unicité de la décomposition de u comme somme d'un élément de F_1 et de F_2, on en déduit que $u=\overrightarrow{0}$.

Supposons que l'on a $F_1\cap F_2=\left\{\overrightarrow{0}\right\}$: Montrons que pour tout $u\in F_1+F_2$, il existe un unique couple $(u_1,u_2)\in F_1+F_2$ tel que $u=u_1+u_2$.
Soit alors $u\in F_1+F_2$. Par définition de F_1+F_2, il existe un couple $(u_1,u_2)\in F_1\times F_2$ tel que $u=u_1+u_2$. Montrons que ce couple est unique. Supposons donc qu'il existe un autre couple $(v_1,v_2)\in F_1\times F_2$ tel que $u=v_1+v_2$ et montrons alors que $v_1=u_1$ et $v_2=u_2$.
Puisque $u=u_1+u_2$ et $u=v_1+v_2$, il vient que $\underbrace{u_1-v_1}_{\in F_1}=\underbrace{u_2-v_2}_{\in F_2}$. Par suite le vecteur $u_1-v_1\in F_1\cap F_2$ et donc $u_1-v_1=\overrightarrow{0}$ par hypothèse, et donc $u_1=v_1$. On en déduit alors que $u_2=v_2$, ce qui assure ainsi l'unicité de la décomposition de u.

Montrer que deux sous-espaces sont en somme-directe

Pour montrer que F_1 et F_2 sont deux sous-espaces de E en somme directe on peut :

utiliser la définition : à savoir, on montre que l'écriture de tout vecteur $u\in F_1+F_2$ sous la forme $u=\underbrace{f_1}_{\in F_1}+\underbrace{f_2}_{\in F_2}$ est unique.

utiliser la caractérisation $F_1\cap F_2=\left\{\overrightarrow{0}\right\}$: on montre alors que le seul élément qui appartient à la fois à F_1 et à F_2 est le vecteur nul de E.
Pour cela :
- on considère un vecteur u de $F_1\cap F_2$;
- on traduit le fait que $u\in F_1$ à l'aide de la caractérisation des éléments de F_1 ;
- on traduit le fait que $u\in F_2$ à l'aide de la caractérisation des éléments de F_2 ;
- on met en correspondance ces deux caractérisations pour mettre en évidence le fait que seul le vecteur nul peut les satisfaire simultanément.

Exemple 3 – Somme directe dans $\mathbb{R}^4$

Soient $F_1=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4,\ x+y+z+t=0\right\}$ et $F_2=\text{Vect}\left((1,1,1,1)\right)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.

Montrer que la somme F_1+F_2 est directe

.

□

Éléments de réponse:

Par théorème on sait que : $\text{(La somme } F_1+F_2 \text{ est directe)} \quad \Leftrightarrow \quad \left(F_1\cap F_2=\left\{\overrightarrow{0}\right\}\right)$

Puisque $F_1\cap F_2$ est un sous-espace vectoriel de E, il contient nécéssairement le vecteur nul $\overrightarrow{0}=(0,0,0,0)$ de $\mathbb{R}^4$.
Il suffit donc de montrer que le seul vecteur de $F_1\cap F_2$ est le vecteur nul.
Soit alors $u=(x,y,z,t)\in F_1\cap F_2$.
Comme en particulier $u\in F_2$, il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ te que $u=\alpha\,(1,1,1,1)$, c'est à dire que $u=(\alpha,\alpha,\alpha,\alpha)$.
Or on a aussi $u\in F_1$, donc $\alpha+\alpha+\alpha+\alpha=0$, ce qui donne $\alpha=0$.
Par suite $u=(0,0,0,0)$ et par conséquent le seul vecteur de $F_1\cap F_2$ est le vecteur nul de $\mathbb{R}^4$.

Application| [4714] | 3| Somme directe dans $\mathbb{R}_2[x]$

Soient $F_1 = \{P \in \mathbb{R}_2[x],\ P(0) = P'(0) = 0\}$ et $F_2 = \mathbb{R}_1[x]$.

(1). Montrer que F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[x]$.

(2). Montrer que la somme $F_1 + F_2$ est directe.

□

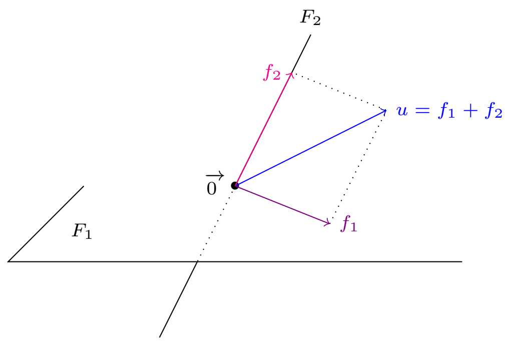
3. Sous-espaces supplémentaires

Définition 2 – Sous-espaces supplémentaires

Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.

On dit que F_1 **et** F_2 **sont deux sous-espaces supplémentaires de** E ou plus simplement **supplémentaires** lorsque tout vecteur de E **se décompose de manière unique** comme somme d'un élément de F_1 et d'un élément de F_2.

Lorsque c'est le cas, on écrit alors : $E = F_1 \oplus F_2$.



$$(F_1 + F_2 \text{ sont supplémentaires}) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \text{Pour tout } u \in E, \\ \text{il existe un unique } (f_1, f_2) \in F_1 \times F_2 \\ \text{tel que : } \quad u = f_1 + f_2 \end{array} \right)$$

□

Remarque 2 – Différence entre somme directe et supplémentaire

$$(\text{La somme } F_1 + F_2 \text{ est directe}) \Updownarrow \left(\begin{array}{c} \text{Pour tout } u \in F_1 + F_2, \\ \text{il existe un unique } (f_1, f_2) \in F_1 \times F_2 \\ \text{tel que : } \quad u = f_1 + f_2 \end{array} \right)$$

$$(F_1 \text{ et } F_2 \text{ sont supplémentaires}) \Updownarrow \left(\begin{array}{c} \text{Pour tout } u \in E, \\ \text{il existe un unique } (f_1, f_2) \in F_1 \times F_2 \\ \text{tel que : } \quad u = f_1 + f_2 \end{array} \right)$$

Dire que $E = F_1 \oplus F_2$ c'est dire notamment que l'ensemble $F_1 + F_2$ est exactement l'ensemble E, ce qui n'est pas le cas lorsque l'on dit que la somme $F_1 + F_2$ est directe.

□

Exemple 4 – Supplémentaires de $\mathbb{R}^3$

Soient $F_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 0\right\}$ et $F_2 = \operatorname{Vect}\left((1, 2, 1)\right)$ deux sous-espaces de $\mathbb{R}^3$.

? Montrer que $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2$.

□

Éléments de réponse:
Montrons que tout vecteur $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se décompose de manière unique comme somme d'un élément de F_1 et d'un élément de F_2, en raisonnant par analyse-synthèse pour obtenir cette décomposition.

Analyse : Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et supposons que l'on ait $u = \underbrace{u_1}_{\in F_1} + \underbrace{u_2}_{\in F_2}$.

Puisque $u_2 \in F_2$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u_2 = \alpha\,(1, 2, 1)$, c'est à dire $u_2 = (\alpha, 2\alpha, \alpha)$.
Comme $u = u_1 + u_2$, on a $u_1 = u - u_2$.
Ainsi par opération sur les éléments de $\mathbb{R}^3$, on a $u_1 = (x - \alpha, y - 2\alpha, z - \alpha)$.
Or $u_1 \in F_1$, donc on a : $(x - \alpha) + (y - 2\alpha) + (z - \alpha) = 0$ ce qui donne $\alpha = \dfrac{x + y + z}{4}$ et par suite $u_2 = \left(\dfrac{x+y+z}{4}, \dfrac{x+y+z}{2}, \dfrac{x+y+z}{4}\right)$.
De même, on obtient $u_1 = \left(\dfrac{3x - y - z}{4}, \dfrac{-x + y - z}{2}, \dfrac{-x - y + 3z}{4}\right)$.

Synthèse : pour tout $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

On considère les deux éléments u_1 et u_2 définis par $\begin{cases} u_1 &= \left(\dfrac{3x - y - z}{4}, \dfrac{-x + y - z}{2}, \dfrac{-x - y + 3z}{4}\right) \\ u_2 &= \left(\dfrac{x+y+z}{4}, \dfrac{x+y+z}{2}, \dfrac{x+y+z}{4}\right) \end{cases}$.

On a bien :

- $$\begin{aligned} u_1 + u_2 &= \left(\frac{3x - y - z}{4}, \frac{-x + y - z}{2}, \frac{-x - y + 3z}{4}\right) + \left(\frac{x+y+z}{4}, \frac{x+y+z}{2}, \frac{x+y+z}{4}\right) \\ &= \dots \\ &= (x, y, z) \\ &= u \end{aligned}$$
- u_1 est tel que : $\dfrac{3x - y - z}{4} + \dfrac{-x + y - z}{2} + \dfrac{-x - y + 3z}{4} = 0$, donc $u_1 \in F_1$.
- u_2 est tel que que : $u_2 = \dfrac{x + y + z}{4}(1, 1, 1)$ donc $u_2 \in F_2$.

Conclusion : on a donc montré que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ se décompose de manière unique sur $F_1 + F_2$.

Application| [4715] | 4| Supplémentaires de $\mathbb{R}_2[x]$

Soient $F_1 = \{P \in \mathbb{R}_2[x],\ P(0) = P'(0) = 0\}$ et $F_2 = \mathbb{R}_1[x]$.
Montrer que $\mathbb{R}_2[x] = F_1 \oplus F_2$.

□

4. Caractérisation des sous-espaces supplémentaires

Théorème 4 – Caractérisation des supplémentaires par somme directe

Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces de E.

$$(E = F_1 \oplus F_2) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} F_1 \cap F_2 = \left\{\overrightarrow{0}\right\} \\ E = F_1 + F_2 \end{cases}$$

□

Éléments de preuve:

Supposons que $E = F_1 \oplus F_2$: on a déjà $E = F_1 + F_2$ de part la définition de la notion de supplémentaire, puisque tous les éléments de E se décomposent sur $F_1 + F_2$.
Montrons alors que $F_1 \cap F_2 = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$. Comme $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace de E, $F_1 \cap F_2$ contient le vecteur nul de E. Montrons alors que c'est le seul élément de $F_1 \cap F_2$.
Soit alors $u \in F_1 \cap F_2$.
On peut écrire que : $u = \underbrace{u}_{\in F_1 \cap F_2 \subset F_1} + \underbrace{\overrightarrow{0}}_{\in F_2}$.
Mais on peut aussi écrire que : $u = \underbrace{\overrightarrow{0}}_{\in F_1} + \underbrace{u}_{\in F_1 \cap F_2 \subset F_2}$.
Par unicité de la décomposition de u comme somme d'un élément de F_1 et de F_2, on en déduit que $u = \overrightarrow{0}$.

Supposons que $F_1 \cap F_2 = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ et $E = F_1 + F_2$: soit $u \in E$. Par hypothèse, il existe $(u_1, u_2) \in F_1 \times F_2$ tel que $u = u_1 + u_2$. Supposons que l'on ait un autre couple $(v_1, v_2) \in F_1 \times F_2$ tel que $u = v_1 + v_2$.
On a donc $u_1 - v_1 = u_2 - v_2$. Donc $u_1 - v_1 \in F_1$ car F_1 est un sous-espace de E et pour la même raison $u_2 - v_2 \in F_2$. On en déduit donc que $u_1 - v_1 \in F_1 \cap F_2$ et $u_2 - v_2 \in F_1 \cap F_2$.
Or par hypothèse $F_1 \cap F_2 = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$, donc $u_1 - v_1 = \overrightarrow{0}$ et $u_2 - v_2 = \overrightarrow{0}$, ce qui assure que $u_1 = v_1$ et $u_2 = v_2$, et la décomposition de u sur $F_1 + F_2$.

Point méthode 1 – Montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires par somme directe

Pour montrer que deux sous-espaces F_1 et F_2 de E sont supplémentaires, on peut :

utiliser la définition : on montre que l'écriture de tout vecteur $u \in E$ sous la forme $u = \underbrace{f_1}_{\in F_1} + \underbrace{f_2}_{\in F_2}$ est unique.

utiliser la caractérisation $\begin{cases} F_1 \cap F_2 = \left\{\overrightarrow{0}\right\} \\ E = F_1 + F_2 \end{cases}$ **:** où l'on commence par s'assurer que la somme $F_1 + F_2$ est directe, puis que tout vecteur u de E peut s'écrire $u = \underbrace{f_1}_{\in F_1} + \underbrace{f_2}_{\in F_2}$.

□

Théorème 5 – Caractérisation des supplémentaires la dimension

On suppose ici que E est de **dimension finie** et soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Les propositions suivantes sont équivalentes :

F_1 et F_2 sont supplémentaires.

$\begin{cases} F_1 \cap F_2 &= \left\{\overrightarrow{0}\right\} \\ E &= F_1 + F_2 \end{cases}$

$\begin{cases} F_1 \cap F_2 &= \left\{\overrightarrow{0}\right\} \\ \dim(E) &= \dim(F_1) \end{cases}$

$\begin{cases} E &= F_1 + F_2 \\ \dim(E) &= \dim(F_1) + \dim(F_2) \end{cases}$

□

Éléments de preuve: L'équivalence **(1)⇔(2)** est acquise par le théorème précédent.

Supposons (2) et montrons (3) : d'après la formule de Grassman, on a : $\dim(F_1 + F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(F_1 \cap F_2)$ et comme $F_1 \cap F_2 = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ on a $\dim(F_1 \cap F_2) = 0$, ce qui donne comme $E = F_1 + F_2$ que $\dim(E) = \dim(F_1) + \dim(F_2)$.

Supposons (3) et montrons (4) : d'après la formule de Grassman, on a : $\dim(F_1 + F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(F_1 \cap F_2)$. Comme $F_1 \cap F_2 = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ on a $\dim(F_1 \cap F_2) = 0$, et ainsi $\dim(F_1 + F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2)$. Ainsi $F_1 + F_2$ est un sous-espace vectoriel de E tel que $\dim(F_1 + F_2) = \dim(E)$. Par théorème, $F_1 + F_2 = E$.

Supposons (4) et montrons (2) : d'après la formule de Grassman, $\dim(F_1 + F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(F_1 \cap F_2)$, et comme $\dim(E) = \dim(F_1) + \dim(F_2)$, on en déduit que $\dim(F_1 \cap F_2) = 0$ ce qui assure que $F_1 \cap F_2 = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

Remarque 3 – Utilisation du théorème

On remarquera que l'utilisation de ce théorème nécessite que E soit un espace de dimension finie, ce qui assurera le fait que F_1 et F_2 le soient, mais que surtout, il est impératif de connaître la valeur des dimensions de ces trois espaces E, F_1 et F_2 pour conclure.

On sera donc régulièrement amené à déterminer une base de F_1 et F_2 avant d'utiliser ce théorème.

□

Exemple 5 – Sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^4$

Soient $F_1 = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + y + z + t = 0\right\}$ et $F_2 = \text{Vect}\ ((1, 1, 1, 1))$.

Montrer que $\mathbb{R}^4 = F_1 \oplus F_2$.

□

Éléments de réponse:

Montrons que $F_1 \cap F_2 = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ **:** $F_1 \cap F_2$ étant un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, il contient le vecteur nul de $\mathbb{R}^4$.
Montrons que c'est le seul vecteur de $F_1 \cap F_2$.
Soit alors $u = (x, y, z, t) \in F_1 \cap F_2$. Comme $u \in F_2$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u = \alpha\,(1, 1, 1, 1)$ c'est à dire $u = (\alpha, \alpha, \alpha, \alpha)$. Or on a aussi $u \in F_1$, donc $\alpha + \alpha + \alpha + \alpha = 0$, ce qui donne $\alpha = 0$. Par suite $u = (0, 0, 0, 0)$, ce qui assure alors que $F_1 \cap F_2 = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

Montrons que $\dim\left(\mathbb{R}^4\right) = \dim(F_1) + \dim(F_2)$ **:** Commenęons par rechercher une base de F_1 pour en déduire sa dimension.
On remarque que :
$$(u = (x, y, z, t) \in F_1) \Leftrightarrow (x + y + z + t = 0) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrrr} x & = & -y & -z & -t \\ y & = & y & & \\ z & = & & z & \\ t & = & & & t \end{array}\right.$$
donc on en déduit que $F_1 = \text{Vect}\ ((-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1))$ et on peut montrer que cette famille génératrice de F_1 est libre, donc en forme une base et par conséquent que $\dim(F_1) = 3$.
Par ailleurs, $\dim(F_2) = 1$ comme $\dim\left(\mathbb{R}^4\right) = 4$, il vient clairement que $\dim\left(\mathbb{R}^4\right) = \dim(F_1) + \dim(F_2)$.

5. Concaténation des bases

Théorème 6 – Concaténation de base de sous-espaces supplémentaires

On suppose que E est un espace de dimension finie, et soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.

(1). Si $\left\{\begin{array}{l} (u_1,\ \dots,\ u_p) \text{ est une base de } F_1 \\ (v_1,\ \dots,\ v_q) \text{ est une base de } F_2 \\ F_1 \text{ et } F_2 \text{ sont supplémentaires} \end{array}\right.$, alors la famille $(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q)$ est une base de E.

(2). Si $(e_1,\ \dots,\ e_n)$ est une base de E, alors $\text{Vect}\ ((e_1,\ \dots,\ e_k))$ et $\text{Vect}\ ((e_{k+1},\ \dots,\ e_n))$ sont deux sous-espaces supplémentaires.

□

Éléments de preuve:

(1). Montrons que la famille $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q)$ est une base de E.
On commence par remarquer que $\dim(F_1) = p$ et $\dim(F_2) = q$ et que parce que $F_1 + F_2$ sont supplémentaires, on a nécessairement $\dim(E) = \dim(F_1) + \dim(F_2)$. Puisque le nombre de vecteurs de la famille $\mathcal{B}$ est égal à la dimension de l'espace E, par théorème, il suffit de montrer que cette dernière est libre.
Supposons donc qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q) \in \mathbb{R}^{p+q}$ tel que $\lambda_1 u_1 + \dots \lambda_p u_p + \mu_1 v_1 + \dots + \mu_q v_q = \overrightarrow{0}$.

On a alors $\underbrace{\lambda_1 u_1 + \ldots \lambda_p u_p}_{\in F_1} = \underbrace{-\mu_1 v_1 - \ldots - \mu_q v_q}_{\in F_2}$.

Ainsi, $\lambda_1 u_1 + \ldots \lambda_p u_p \in F_2$ donc $\lambda_1 u_1 + \ldots \lambda_p u_p \in F_1 \cap F_2$ et sur le même principe $\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_q v_q \in F_1$ donc $\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_q v_q \in F_1 \cap F_2$.

Or $F_1 \cap F_2 = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$, donc $\lambda_1 u_1 + \ldots \lambda_p u_p = \overrightarrow{0}$ et $\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_q v_q = \overrightarrow{0}$.

Les deux familles $(u_1, \ldots, u_p)$ et $(v_1, \ldots, v_q)$ étant des bases respectives de F_1 et F_2, elles en forment des familles libres, et donc d'après la défintion des familles libres, il vient que $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_p = 0$ et $\mu_1 = 0, \ldots, \mu_q = 0$, ce qui assure le caractère libre de la famille $\mathcal{B}$.

(2). Montrons que $F_1 = \text{Vect}\,(u_1, \ldots, u_k)$ et $F_2 = \text{Vect}\,(u_{k+1}, \ldots, u_n)$ sont supplémentaires.

La famille $(u_1, \ldots, u_k)$ est une sous-famille d'une famille libre. Par théorème, elle est encore libre, et forme donc une famille libre et géneratrice de F_1. Par suite, $\dim(F_1) = k$, et sur le même principe $\dim(F_2) = n - k$. Ainsi, on a $\dim(E) = \dim(F_1) + \dim(F_2)$.

Par définition :
$$\begin{aligned} F_1 + F_2 &= \{f_1 + f_2,\, (f_1, f_2) \in F_1 \times F_2\} \\ &= \{\lambda_1 e_1 + \ldots \lambda_k e_k + \mu_1 e_{k+1} + \ldots + \mu_{n-k} e_n,\, (\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu_1, \ldots, \mu_{n-k}) \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \text{Vect}\,(e_1, \ldots, e_n) \end{aligned}$$

et comme $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, on a $E = \text{Vect}\,(e_1, \ldots, e_n)$ ce qui donne que $E = F_1 + F_2$. Ainsi, par théorème, on en déduit que $E = F_1 \oplus F_2$.

Exemple 6 – Utilisation du théorème de concaténation des bases

?

$F_1 = \text{Vect}\,((1,0,0))$ et $F_2 = \text{Vect}\,((1,1,0),(1,1,1))$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

□

Éléments de réponse:

La famille $\mathcal{F} = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ puisque la matrice de $\mathcal{F}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et est clairement inversible puisque de rang 3.

D'après le deuxième point du théorème de concaténation des bases, les deux sous-espaces vectoriels $\text{Vect}\,((1,0,0))$ et $\text{Vect}\,((1,1,0),(1,1,1))$ sont supplémentaires, et donc que F_1 et F_2 sont supplémentaires.

Application| [3424] | 5| Supplémentaires de $\mathbb{R}^3$

Soient $F = \text{Vect}\,((1,1,1))$ et $G = \left\{(b+c, b, c) \in \mathbb{R}^3,\, (b,c) \in \mathbb{R}^2\right\}$ deux sous-espaces de $\mathbb{R}^3$. Sont-ils supplémentaires ?

□

6 . Existence de supplémentaires en dimension finie et dimension

Théorème 7 – Supplémentaire en dimension finie

On suppose que E est un espace de dimension finie et soit F un sous-espace de E.

Alors F admet au moins un supplémentaire.

□

Éléments de preuve:
Considérons $\mathcal{B}$ une base de E, ainsi que $\mathcal{F}$ une base de F.
La famille $\mathcal{F}$ étant une base de F, c'est donc une famille libre de vecteurs de E. Ainsi, puisque $\mathcal{B}$ est en particulier une partie génératrice de E, d'après le théorème de la base incomplète, il existe une sous-famille $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{B}$ telle que la famille formée des vecteurs de la famille $\mathcal{F}$ et de la sous-famille $\mathcal{B}'$ soit une base de E. Or d'après le théorème de concaténation des bases les deux sous-espaces $F = \mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$ et $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{B}')$ sont supplémentaires.

Théorème 8 – Dimension d'un supplémentaire

On suppose que E est un espace de dimension finie et soit F un sous-espace de E.

En notant G un supplémentaire de F, on a : $\quad \dim(G) = \dim(E) - \dim(F)\,.$

□

Éléments de preuve:
C'est une simple conséquence du théorème de caractérisation des supplémentaires.

Application| `[4716]` **| 6| Supplémentaires de $\mathbb{R}^4$**

Soient $F_1 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x+y+z+t=0\right\}$ et $F_2 = \mathrm{Vect}\,((1,1,0,0),(1,1,0,1))$ deux sous-espaces de $\mathbb{R}^4$.
F_1 et F_2 sont-ils supplémentaires ?

□

7 . Somme directe de p sous-espaces vectoriels

Contexte

Les éléments présentés ci-dessous ont pour finalité de généraliser la notion de sous-espaces supplémentaires.

□

Définition 3 – Somme directe de p sous-espaces

Soient F_1, F_2, ..., F_p des sous-espaces vectoriels de E.
On dit que la somme $F_1 + F_2 + \ldots + F_p$ est **directe**, lorsque tout vecteur de $F_1 + F_2 + \ldots + F_p$ se décompose de manière unique comme somme de vecteurs de $(F_1, \ldots, F_p)$.

On notera alors dans ce cas $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} F_i = F_1 \oplus F_2 \ldots \oplus F_p$.

Lorsque l'on aura $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} F_i$, on dira que $(F_1, \ldots, F_p)$ est une décompositon en somme directe de E.

□

Théorème 9 – Caractérisation d'une somme directe par unicité de la décomposition du vecteur nul

Soient F_1, F_2, ..., F_p des sous-espaces vectoriels de E.

$$\left(\text{La somme } F_1 + F_2 + \ldots + F_p \text{ est directe}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \text{Pour tout } \overrightarrow{f_1} \in F_1,\ \overrightarrow{f_2} \in F_2,\ \ldots,\ \overrightarrow{f_p} \in F_p, \text{ on a :} \\ \left(\overrightarrow{f_1} + \overrightarrow{f_2} + \ldots + \overrightarrow{f_p} = \overrightarrow{0_E}\right) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{0_E} \\ \overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{0_E} \\ \quad\vdots \\ \overrightarrow{f_p} = \overrightarrow{0_E} \end{array} \right. \end{array} \right)$$

□

Exemple 7

Soient $F_1 = \text{Vect}\left((1,1,1,1)\right)$, $F_2 = \text{Vect}\left((1,0,1,0)\right)$ et $F_3 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x+y+z+t = 0\right\}$.

?

Montrer que l'on a $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 = \mathbb{R}^4$

□