AL11

Matrices et applications linéaires

Version du 26-01-2023 à 13:19

1. Matrice d'un élément de $\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^p\right)$

Introduction – Isomorphisme canonique et matrice d'une application linéaire

On note $(e_1, \ldots, e_q)$ et $(f_1, \ldots, f_p)$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^q$ et $\mathbb{R}^p$.
Soit $u \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^p\right)$ et $x = (x_1, \ldots, x_q) \in \mathbb{R}^q$.

On écrit la décomposition de x sur $(e_1, \ldots, e_q)$:

$$x = \sum_{j=1}^{q} x_j e_j$$

avec $x_1, x_2, \ldots, x_q \in \mathbb{R}$ et on a alors par linéarité de u :

$$u(x) = \sum_{j=1}^{q} x_j u(e_j)$$

La connaissance de $u\left(e_j\right)$ pour tout $j \in [\![1; p]\!]$ détermine entièrement u et $f u, x$

Sur un exemple avec $u \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4\right)$

Pour $x = (2, -4, 3) \in \mathbb{R}^3$, on a donc :

$$x = 2e_1 - 4e_2 + 3e_3$$

puis par linéarité de u :

$$\begin{aligned} u(x) &= u(2e_1 - 4e_2 + 3e_3) \\ &= 2u(e_1) - 4u(e_2) + 3u(e_3) \end{aligned}$$

Image d'un vecteur :

Pour $j \in [\![1; q]\!]$, $u(e_j)$ est une vecteur de $\mathbb{R}^p$ donc se décompose sur la base $(f_1, \ldots, f_p)$ de $\mathbb{R}^p$:

$$(\star) : \quad u(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} f_i$$

d'où l'on tire : $$u(x) = \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=1}^{p} \left[(a_{ij} x_j) f_i\right]$$

Or on sait que u est parfaitement définie par la donnée de $u(e_1)$, $u(e_2)$,..., $u(e_q)$ puisque $(e_1, \ldots, e_q)$ est une base de $\mathbb{R}^q$.

La relation $(\star)$ montre que $u(e_1)$, $u(e_2)$,..., $u(e_q)$ sont parfaitement définis par les éléments a_{ij} de $\mathbb{R}$ lorsque i varie de 1 à p et j de 1 à q.

Sur un exemple avec $u \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4\right)$

Si u est telle que :

$$\begin{cases} u(e_1) = 2f_1 + 3f_2 - 2f_3 + 4f_4 \\ u(e_2) = 2f_1 + 2f_2 - 3f_3 + 4f_4 \\ u(e_3) = -2f_1 + 2f_2 - 2f_3 + 3f_4 \end{cases}$$

on en déduira que :

$$\begin{aligned} u(x) &= 2(2f_1 + 3f_2 - 2f_3 + 4f_4) \\ &\quad -4(2f_1 + 2f_2 - 3f_3 + 4f_4) \\ &\quad +3(-2f_1 + 2f_2 - 2f_3 + 3f_4) \\ &= (2 \times 2 - 4 \times 2 + 3 \times (-2)) f_1 \\ &\quad + (2 \times 3 - 4 \times 2 + 3 \times 2) f_2 \\ &\quad + (2 \times (-2) - 4 \times (-3) + 3 \times (-2)) f_2 \\ &\quad + (2 \times 4 - 4 \times 4 + 3 \times 3) f_4 \\ &= 10f_1 + 4f_2 + 2f_3 + 1f_4 \end{aligned}$$

Construction d'un isomorphisme :

u est parfaitement déterminé par la donnée de la matrice $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq p\\1\leq j\leq q}}$.
Réciproquement la donnée de u permet de déterminer une et une seule matrice comme ci-dessus. En outre, on a $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq p\\1\leq j\leq q}} \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

Ainsi, on a définit une bijection :

$$\mathrm{Mat} : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^p\right) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R}) \\ u & \longmapsto & (a_{ij}) \end{array} \right.$$

la matrice (a_{ij}) étant comme définie précédemment.

Sur un exemple avec $u \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4\right)$

L'application linéaire $u \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4\right)$ est donc associée par cet isomorphisme à la matrice

$$M(u) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & -2 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,3}(\mathbb{R})$$

où l'on remarquera notamment que

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & -2 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{Mat}(u)} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}}_{=x} = \underbrace{\begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=u(x)}$$

$\square$

Définition 1 – Matrice d'une application linéaire de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}^p$

On note $(e_1, \ldots, e_q)$ et $(f_1, \ldots, f_p)$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^q$ et $\mathbb{R}^p$, et soit $u \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^p\right)$.

Construction de la matrice d'une application linéaire

On note alors $\mathrm{Mat}(u) = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ la matrice associée à u par l'isomorphime Mat défini précédemment.

Puisque $u\left(e_j\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_{ij} f_i$, l'image de e_j par u est $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{pj}) \in \mathbb{R}^p$.
C'est donc, à la représentation près, le jᵉ vecteur colonne de $\mathrm{Mat}(u)$.
Pour s'en souvenir on écrit :

$$\mathrm{Mat}(u) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \overset{u(e_1)}{\downarrow} & \overset{u(e_2)}{\downarrow} & \cdots & \overset{u(e_q)}{\downarrow} \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_p \end{array}$$

Expression analytique

Pour $x = (x_1, \ldots, x_q) \in \mathbb{R}^q$, puisque

$$u\left(x\right) = \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=1}^{p} \left[\left(a_{ij} x_j\right) f_i\right]$$

si l'on pose $y = u(x)$ avec $y = (y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$, on a :

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1q}x_q \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2q}x_q \\ y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3q}x_q \\ \vdots \\ y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \dots + a_{iq}x_q \\ \vdots \\ y_p = a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + a_{p3}x_3 + \dots + a_{pq}x_q \end{cases}$$

qui est l'**expression analytique** de u.

Utilisation de la représentation matricielle

Pour $x = (x_1, \dots, x_q) \in \mathbb{R}^q$, on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{q,1}(\mathbb{R})$, le vecteur image $u(x) = (y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$ s'obtient, à la représentation près, par le produit matriciel :

$$\mathrm{Mat}(u) \times X = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$$

.

Application linéaire canoniquement associée

Soit $M \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Par ce qui précède, on peut associer un unique $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^p)$ à M qui vérifie $M = M(u)$.

On dit que u **est l'application linéaire canoniquement associée à** M.

□

Point méthode 1 – Écrire dans les bases canoniques la matrice pour $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^p)$

Pour écrire la matrice de $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^p)$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^q$ et $\mathbb{R}^p$:

(1). on détermine les images par u de chaque vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^q$.

(2). on écrit ensuite en colonne les coordonnées des vecteurs obtenus.

On rappelle que la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est formée des n vecteurs $e_j = \underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}_{\text{le 1 est à la } j^{\text{e}}\text{place}}$.

□

Application| [3446] | 1| Écrire la matrice d'une application linéaire

Soit $u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y-z, 2x-y-3z) \end{array} \right. \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2\right)$.

Écrire la matrice $\mathrm{Mat}(u)$ de u.

□

Exemple 1 – Manipuler la représentation matricielle d'une application linéaire

On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

? Justifier SANS calculs que $(e_3, 2e_1 - e_2)$ est une base du noyau de f et donner une base de $\mathrm{Im}\,(f)$

.

□

Application|[3447]| 2| Utilisation de la représentation matricielle

Soit $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ tel que sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\,(f)$ et une base de $\mathrm{Im}\,(f)$.

□

2. Matrice d'une application linéaire

Contexte

Dans tout ce chapitre, sauf mention contraire, p et q désigneront deux entiers naturels non nuls. Par ailleurs :

- E est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie $q \geq 1$ dont on note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_q)$ une base.
- F est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie $p \geq 1$ dont on note $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_p)$ une base.
- $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

$\square$

Définition 2 – Matrice d'une application linéaire

On appelle **matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$**, notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$, la matrice $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}} \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ est donné par :

$$\forall j \in [\![1;q]\!], \quad u(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} f_i$$

La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ est la matrice dans la base $\mathcal{C}$ de la famille de vecteurs $(u(e_1), \ldots, u(e_q))$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u(e_1), \ldots, u(e_q))$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} u(e_1) & u(e_2) & \cdots & u(e_q) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_p \end{array} \end{array}$$

La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ dépend fortement du choix des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

$\square$

Point méthode 2 – Écrire la matrice pour $u \in \mathcal{L}(E, F)$

Pour écrire la matrice de $u \in \mathcal{L}(E, F)$ dans les bases $\underbrace{\mathcal{B}}_{\text{Base de } E}$ et $\underbrace{\mathcal{C}}_{\text{Base de } F}$:

(1). on détermine les images par u de chaque vecteur de la base $\mathcal{B}$ de E.

(2). on exprime ces images dans la base $\mathcal{C}$ de F.

(3). on écrit en colonnes les coordonnées obtenues.

$\square$

Application| [3449] | 3| Avec des polynômes

Soit $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & 2\left(X^2 - X + 1\right) P - \left(X^3 + 1\right) P'(X+1) \end{array} \right.$.

On admet que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}_3[X])$.

Écrire la matrice M de φ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}_3[X]$.

$\square$

Application| [3448] **| 4| Représentation matricielle et choix de la base**

Soit $u : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+2y, 2x-y, -x+y) \end{array}\right.$.

On admet que $u \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3\right)$.

(1). Écrire la matrice M de u dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

(2). On admet que la famille $\mathcal{C} = \{(1,0,1), (0,1,2), (-1,-1,-1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Écrire la matrice M de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{C}$.

□

Proposition 1 – Cas d'un endomorphisme

Lorsque $E = F$, il est implicite que $\mathcal{B} = \mathcal{C}$.

Alors ce cas, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et cette matrice est une matrice carrée.

□

Théorème 1 – Dimension de $\mathcal{L}(E,F)$

$\mathcal{L}(E,F)$ est de <u>dimension finie</u> $q \times p$.

□

3. Matrices et calculs d'images

Définition 3 – Représentation matricielle d'un vecteur

Soit $x \in E$. On peut **identifier** le vecteur $x = \underbrace{\sum_{j=1}^{q} x_j e_j}_{\substack{\textbf{Décomposition de } x \\ \textbf{sur la base } \mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_q)}}$ à la **matrice colonne** appelée aussi **vecteur colonne** $X_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \in \mathscr{M}_{q,1}(\mathbb{R})$.

On dit dans ce cas là que $X_{\mathcal{B}}$ est la représentation matricielle du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$.

□

Théorème 2 – Produit matriciel et calcul d'image

Soient $x \in E$ et $y \in F$ dont note $X_{\mathcal{B}}$ et $Y_{\mathcal{C}}$ les représentations matricielles dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

Alors : $\quad (y = u(x)) \quad \Leftrightarrow \quad (Y_{\mathcal{C}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) \times X_{\mathcal{B}})$

□

Application| [3453] | 5| Image par une application linéaire

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}_3[X])$ dont la matrice canoniquement associée à u par rapport aux deux bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}_3[X]$ est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathrm{Can}(\mathbb{R}_2[X]),\mathrm{Can}(\mathbb{R}_3[X])}(u) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer $u(P)$ où $P = 2 + 3X - 2X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$.

□

4. Matrice d'une composée

Théorème 3 – Matrice d'une composée

Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimensions finies.
On désigne par $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ des bases respectives de E, F et G.
On considère $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$.
Alors $v \circ u \in \mathcal{L}(E,G)$ et :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(v) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$$

$$\begin{tikzcd}
(E,\mathcal{B}) \arrow[rr, "\substack{v \circ u \\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(v \circ u)}"] \arrow[dr, "\substack{u \\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)}"'] & & (G,\mathcal{D}) \\
& (F,\mathcal{C}) \arrow[ur, "\substack{v \\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(v)}"'] &
\end{tikzcd}$$

□

Application| [3454] | 6| Représentation matricielle d'une composée

Soient $u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ (a,b,c) & \longmapsto & (a+b+c) + (a-b+c)x + (a+b-c)x^2 \end{array} \right.$ et $v : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ P & \longmapsto & (P(0) - P'(1), P(1) - P'(0)) \end{array} \right.$.

On admet que $u \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}_2[X]\right)$ et $v \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^2\right)$.

(1). Écrire $\mathrm{Mat}_{\mathrm{Can}(\mathbb{R}^3),\mathrm{Can}(\mathbb{R}_2[X])}(u)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathrm{Can}(\mathbb{R}_2[X]),\mathrm{Can}(\mathbb{R}^2)}(v)$.

(2). En déduire $\mathrm{Mat}_{\mathrm{Can}(\mathbb{R}^3),\mathrm{Can}(\mathbb{R}^2)}(v \circ u)$.

(3). Déterminer alors $v \circ u\,(x)$ où $x = (2,-1,1) \in \mathbb{R}^3$.

□

5. Lien entre matrices inversibles, isomorphismes et bases

Théorème 4 – Caractérisation des isomorphismes

Soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension n dont on note $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des bases quelconques, et soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

(u est un **isomorphisme**) $\Leftrightarrow$ ($\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$).

Lorsque c'est le cas : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}\left(u^{-1}\right) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)\right)^{-1}$.

□

Éléments de preuve:

(u est bijectif) $\Leftrightarrow$ ($\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ y = u(x)$)

$\Leftrightarrow$ (Pour tout $y \in F$ dont on note $Y_{\mathcal{C}}$ la représentation matricielle, le système carré de représentation matricielle $\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) | Y_{\mathcal{C}}\right)$, admet une unique solution)

$\Leftrightarrow$ (Le système carré de matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ est de rang n)

$\Leftrightarrow$ (La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ est inversible)

Application | [3455] | 7 | Isomorphisme ou simple endomorphisme ?

Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x - y, 2x + 3y - z, x - 2z) \end{array} \right.$.

(1). Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

(2). f est-il un automorphisme ?

□

Application| [3456] | 8| Isomorphisme ou simple endomorphisme ?

Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & 2(X+1)P - \left(X^2 - 2X + 1\right) P' \end{array} \right.$.

f est-il un automorphisme ?

□

Théorème 5 – Caractérisation des bases

Si $\mathcal{F} = (v_1, \ldots, v_q)$ est une famille de q vecteurs de E où $\dim(E) = q$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

$\mathcal{F}$ est une **base** de E	$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_q)$ est **inversible**	La famille $(v_1, \ldots, v_q)$ est de rang q	Le système de matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_q)$ est de rang q

Le nombre de vecteurs de $\mathcal{F}$ doit être égal à la dimension de E , car sinon la matrice de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ n'est pas carrée !

□

Exemple 2 – Base de vecteurs

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère $u = (1, 1, -1)$, $v = (0, 1, 1)$ et $w = (1, 1, 0)$.

En notant $\mathcal{F} = (u, v, w)$, on a : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ainsi : ($\mathcal{F}$ est une **base** de $\mathbb{R}^3$) $\Leftrightarrow$ ($\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, w)$ est **inversible**.)
$\Leftrightarrow$ (Le système de matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, w)$ est de rang 3)
$\Leftrightarrow$ (La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est inversible)

On échelonne alors en lignes $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, w)$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

qui est ainsi de rang 3 .
Par conséquent la famille $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

□

6. Matrice de passage d'une base à une autre

Définition 4 – Matrice de passage

On appelle **matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$** la matrice $P_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(e'_1, \ldots, e'_n\right)$.
Il s'agit de la matrice formée par les coordonnées écrites en colonnes des vecteurs $\left(e'_1, \ldots, e'_n\right)$ **exprimés dans la base** $\mathcal{B}$.

□

Point méthode 3 – Écrire une matrice de passage

Pour écrire la matrice de passage de la base $\underbrace{\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)}_{\text{ancienne base}}$ à la base $\underbrace{\mathcal{C} = (e'_1, \ldots, e'_n)}_{\text{nouvelle base}}$ on écrit en colonnes les coordonnées des vecteurs $(e'_1, \ldots, e'_n)$ que l'on a exprimés dans la base $\mathcal{B}$.

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} e'_1 & e'_2 & \cdots & e'_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ e_n \end{array} \end{array}$$

□

Exemple 3 – Matrice de passage dans $\mathbb{R}^3$

On note $\mathcal{B} = ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On admet que la famille $\mathcal{C} = ((1,1,1), (1,-1,0), (1,0,-1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ est alors $P_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

□

Application| [3457] | 9| Base et matrice de passage

Soit $P_0 = 1 + X$, $P_1 = X + X^2$ et $P_3 = 1 + X + X^2$ et on note $\mathcal{B} = \left(1, X, X^2\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

(1). Vérifier que $\mathcal{B}' = (P_0, P_1, P_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

(2). Écrire alors la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

□

Théorème 6 – Caractère inversible

(1). La matrice de l'application identité $\mathrm{Id}_E : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$ dans les bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$ est la matrice de passage $P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$.

(2). La matrice de passage $P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$ est inversible et on a : $(P_{\mathcal{B}\mathcal{C}})^{-1} = P_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$.

□

Éléments de preuve:

(1). La matrice de Id_E dans les bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$ se construit en déterminant les images par Id_E des vecteurs $(e'_1, \ldots, e'_n)$ de la base $\mathcal{C}$ que l'on exprime ensuite en fonction des vecteurs $(e_1, \ldots, e_n)$ de la base $\mathcal{B}$.

(2). Puisque $P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ est la matrice de l'application identié de E qui est bijective, par théorème, la matrice $P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ est inversible.

7. Changement de base pour les vecteurs

Proposition 2 – Formule de changement de base - Vecteur

Soit $x \in E$, dont on note $X_{\mathcal{B}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $X_{\mathcal{C}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(x)$ ses représentations matricielles dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

Alors : $\underbrace{X_{\mathcal{B}}}_{\text{Coordonnées dans l'ancienne base}} = P_{\mathcal{B}\mathcal{C}} \times \underbrace{X_{\mathcal{C}'}}_{\text{Coordonnées dans la nouvelle base}}$.

En d'autres termes $P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ permet d'aller de la nouvelle base à l'ancienne base.

□

Éléments de preuve:
C'est une conséquence du fait que $P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ est la matrice de Id_E dans les bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$.

Application| [3458] | 10| Changement de base dans $\mathbb{R}^3$

Soient $u_1 = (1, 2, 0)$, $u_2 = (0, 2, 1)$ et $u_3 = (1, 1, 1)$ où u_1, u_2 et u_3 sont exprimés dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

(1). Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, puis écrire $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

(2). Exprimer les coordonnées de $u = (1, 4, 7)$ donné dans $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

□

8. Changement de base pour les endomorphismes

Théorème 7 – Changement de base pour les endomorphismes

Soit f un endomorphisme de E où l'on note $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$.
On a alors : $\boxed{B = (P_{\mathcal{BC}})^{-1} \times A \times P_{\mathcal{BC}}}$

□

Éléments de preuve:

$$\begin{tikzcd}
(E,\mathcal{B}) \arrow[r, "\mathrm{Mat}_{\mathcal{BB}}(f)"] \arrow[d, "\mathrm{Mat}_{\mathcal{BC}}(\mathrm{Id}_E)"'] & (E,\mathcal{B}) \\
(E,\mathcal{C}) \arrow[r, "\mathrm{Mat}_{\mathcal{CC}}(f)"'] & (E,\mathcal{C}) \arrow[u, "\mathrm{Mat}_{\mathcal{CB}}(\mathrm{Id}_E)"']
\end{tikzcd}$$

En interprêtant matriciellement cette composition :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{BC}}(f) = \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{CB}}(\mathrm{Id}_E)}_{P_{\mathcal{BC}}} \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{CC}}(f) \times \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{BC}}(\mathrm{Id}_E)}_{P_{\mathcal{CB}}=(P_{\mathcal{BC}})^{-1}}$$

qui donnera $A = P_{\mathcal{BC}} \times B \times (P_{\mathcal{BC}})^{-1}$
Puis finalement $P = (P_{\mathcal{BC}})^{-1} \times A \times P_{\mathcal{BC}}$.

Autre justification :

Pour deux vecteurs x et y de E, on a : $\begin{cases} X_{\mathcal{B}} &= P_{\mathcal{BC}} \times X_{\mathcal{C}} \\ Y_{\mathcal{C}} &= P_{\mathcal{BC}} \times Y_{\mathcal{C}} \end{cases}$.
Or on a : $(y = u(x)) \quad \Leftrightarrow \quad (Y_{\mathcal{C}} = A \times X_{\mathcal{B}})$.
On en déduit alors la relation :

$$P_{\mathcal{BC}} \times Y_{\mathcal{C}} = A \times P_{\mathcal{BC}} \times X_{\mathcal{C}}$$

Ainsi : $(y = u(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \left(Y_{\mathcal{C}} = \underbrace{(P_{\mathcal{BC}})^{-1} \times A \times P_{\mathcal{BC}}}_{\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)} \times X_{\mathcal{C}} \right)$.

Application| [4719] | 11| Changement de base pour un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ aX^2 + bX + c & \longmapsto & (3c - b + a) + (2c + a)X + aX^2 \end{array} \right.$$

On rappelle que la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est $\mathcal{B} = \left(1, X, X^2\right)$.

(1). Montrer que la famille $\mathcal{C} = \left(1 + X - X^2, X + X^2, 1 + X\right)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
(2). Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.
(3). En déduire la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$.

□

Application|[3461]| 12| Changement de base

Soit $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P = aX^2 + bX + c & \longmapsto & (3c - b + a) + (2c + a)X + aX^2 \end{array}\right.$.

On <u>admet</u> que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$.

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

(1). Écrire la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

(2). Soit $P_0 = 1 + X - X^2$, $P_1 = X + X^2$ et $P_2 = 1 + X$.

(a). Montrer que $\mathcal{B}' = (P_0, P_1, P_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

(b). Écrire la matrice de passage $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

(3). On admet que $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est l'inverse de $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$.

Déterminer la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}'$.

(4). f est-il un automorphisme ?

□

9. Notion de matrices semblables

Définition 5 – Matrices semblables

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

A et B sont dites **semblables** lorsqu'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Interprétation en terme d'endomorphisme

Deux matrices sont **semblables** lorsqu'elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes. □

Exemple 4 – Matrices semblables et changement de base

Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P = aX^2 + bX + c & \longmapsto & (3c - b + a) + (2c + a)X + aX^2 \end{array} \right.$.

En notant $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B}' = \left(1 + X - X^2, X + X^2, 1 + X\right)$ une autre base, on a d'après les formules de changement de bases que $D = P^{-1}AP$ avec :

$$\underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)}_{=A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \underbrace{P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}}_{=P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)}_{=D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et par suite que A et D sont deux matrices semblables. □

10. Changement de base pour les applications linéaires

Théorème 8 – Changement de base pour les applications linéaires

On suppose que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, et que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont deux bases de F.

Soit $f : E \overset{\text{Linéaire}}{\longrightarrow} F$ où l'on note $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(f)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'}(f)$.

On a alors : $\boxed{B = (P_{\mathcal{C}\mathcal{C}'})^{-1} \times A \times P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}}$ □

Éléments de preuve:

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
(E,\mathcal{B}) \arrow[r, "\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)"] \arrow[d, "\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E)"'] & (F,\mathcal{C}) \\
(E,\mathcal{B}') \arrow[r, "\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(u)"'] & (F,\mathcal{C}') \arrow[u, "\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}',\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_F)"']
\end{tikzcd}$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}',\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_F)}_{P_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}} \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(u) \times \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E)}_{P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \left(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\right)^{-1}}$$

qui donnera $A = P_{\mathcal{C}\mathcal{C}'} \times B \times (P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'})^{-1}$
Puis finalement $B = (P_{\mathcal{C}\mathcal{C}'})^{-1} \times A \times P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$.

Théorème 9 – Version simplifiée des formules de changement de base

On note simplement $P = P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$:

(1). En notant $X = X_{\mathcal{B}}$ et $X' = X_{\mathcal{C}}$ les matrices de $x \in E$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, on a $\boxed{X = PX'}$.

(2). En notant $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$ les matrices de $f \in \mathcal{L}(E)$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, on a $\boxed{B = P^{-1}AP}$.

Cas général pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$

En notant $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(u)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'}(u)$, on a $\boxed{B = Q^{-1}AP}$ avec $P = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ et $Q = P_{\mathcal{C}\mathcal{C}'}$. □

11. Autour de la notion de rang

Introduction – Le point sur la terminologie « rang » déjà rencontrée

On a défini le rang d'un système linéaire comme étant le nombre de pivots après échelonnement de sa matrice échelonnée, ce dernier étant indépendant du second membre du système.

Rang

Soit E un $\mathbb{K}$-espace-vectoriel et $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_q)$ une famille de vecteurs de E.
On appelle rang de la famille $\mathcal{F}$, la dimension du sous-espace engendré par $\mathcal{F}$, c'est à dire :

$$\text{rg}\,(u_1, \ldots, u_q) = \dim(\text{Vect}\,(u_1, \ldots, u_q))$$

Dès lors que E est de dimension finie dont on note $\mathcal{B}$ une base, on a : $\text{rg}\,(u_1, \ldots, u_q)$ est égal au rang du système de matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}\,(u_1, \ldots, u_q)$.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E ou F de dimension finie.
On appelle rang de l'application linéaire u la dimension de $\text{Im}\,(u)$.
En particulier si E est de dimension finie avec $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E on a :

$$\text{Im}\,(f) = \text{Vect}\,(f(e_1), \ldots, f(e_n))$$

et ainsi :
$\text{rg}\,(f) = \text{rg}\,(f(e_1), \ldots, f(e_n))$

□

Définition 6 – Rang d'une matrice

Soit $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^p)$ canoniquement associée à A par l'isomorphisme Mat.

On appelle **rang de** A noté $\text{rg}\,(A)$, le rang de l'application linéaire u, c'est à dire :

$$\begin{aligned} \text{rg}\,(A) &= \dim(\text{Im}\,(u)) \\ &= \text{rg}\,(u) \end{aligned}$$

Ainsi, le rang de A est égal au rang de la famille des vecteurs colonnes de A dans $\mathbb{R}^p$.

□

Proposition 3 – Lien avec le rang d'une famille de vecteurs

Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie n muni d'une base $\mathcal{B}$.
On considère $(v_1, \ldots, v_p)$ une famille de vecteurs de E et on note $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}\,(v_1, \ldots, v_p)$.

Alors $\quad \text{rg}\,(A) = \text{rg}\,(v_1, \ldots, v_p)$.

□

Théorème 10 – Lien avec les applications linéaires

Soit $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.
Alors $\text{rg}\,(A)$ est le rang de TOUTE application linéaire que A représente.

□

Exemple 5 – Rang d'une matrice

Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ x = (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & (x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_3, x_2) \end{array} \right.$ et on note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Par définition $\mathrm{rg}\,(f) = \dim\left(\mathrm{Vect}\,\left(f\,(e_1)\,, f\,(e_2)\,, f\,(e_3)\right)\right)$ que l'on obtient à partir de la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la famille $\mathcal{F} = \left(f\,(e_1)\,, f\,(e_2)\,, f\,(e_3)\right)$.

C'est à dire on a : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=A}$ où après échelonnement on a que $\mathrm{rg}\,(f) = 2$ et ainsi que $\mathrm{rg}\,(A) = 2$.

$\square$

Théorème 11 – Conservation du rang

Si Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ alors les matrices A, PA et AP ont le même rang.

Cas de deux matrices semblables

Deux matrices semblables ont le même rang.

$\square$

Théorème 12 – Caractérisation des matrices inversibles à l'aide du rang

Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, les assertions suivantes sont équivalentes :

A est inversible	$\mathrm{rg}\,(A) = n$	La famille des n vecteurs colonnes de A est libre	Le système de matrice A est de rang n

$\square$

Théorème 13 – Caractérisation des isomorphismes par le rang

Soit $u \in \mathcal{L}\,(E, F)$ où E et F sont deux espaces de même dimension n.
On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{BC}}(u) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ où $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont deux bases de E et F.

(u est bijectif) $\Leftrightarrow$ ($\mathrm{rg}\,(A) = n$)

$\square$

Application| [2206] | 13| Rang d'une application

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé.
Quel est le rang de f ? Est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

□

12 . Matrice d'une application linéaire de rang r

Théorème 14

Si $f : E \overset{\text{Linéaire}}{\longrightarrow} F$ est telle que $\mathrm{rg}\,(f) = r$, alors il existe un base de E et une base de F dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix}$.

Matrice de rang r

Si A est une matrice de rang r,
alors il existe deux matrices carrées Q et P inversibles telles que

$$A = Q \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & (0) \\ (0) & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

□

Éléments de preuve: