**AL10**

# Applications linéaires

Version du 26-01-2023 à 13:11

**Contexte**

Dans tout ce qui suit, sauf mention contraire, $E$, $F$ et $G$ désigneront des $\mathbb{R}-$espaces vectoriels qui pourront être $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[x]$, $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ ou tout autre espace vectoriel de dimension finie.

Sans présumer de la nature de $E$, $F$ ou $G$, on notera $\overrightarrow{0}$ leur vecteur nul, en précisant éventuellement en indice duquel on parle comme par exemple $\overrightarrow{0}_E$ pour le vecteur nul de $E$.

□

## 1. Notion d'application linéaire

**Définition 1 – Application linéaire**

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que $f$ est une **application linéaire** lorsque :

$$\forall (u,v) \in E \times E, \quad f(u+v) = f(u) + f(v)$$

$$\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda u) = \lambda f(u)$$

On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de $E$ dans $F$ et simplement $\mathcal{L}(E)$ lorsque $E = F$.

**Image du vecteur nul et de l'opposé d'un vecteur**

Pour $f \in \mathcal{L}(E,F)$ : $\quad f\left(\overrightarrow{0}_E\right) = \overrightarrow{0}_F$ et $\forall u \in E, \quad f(-u) = -f(u)$

**Vocabulaire des applications linéaires**

| Endomorphisme | Isomorphisme | Automorphisme |
|---|---|---|
| $f : E \xrightarrow{\text{Linéaire}} E$ | $f : E \xrightarrow[\text{Bijective}]{\text{Linéaire}} F$ | $f : E \xrightarrow[\text{Bijective}]{\text{Linéaire}} E$ |

□

**Application|[3426]| 1| Calcul d'image par une application linéaire**

Soit $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}\right)$ telle que $f(1,0) = 2$ et $f(0,1) = -3$.

Calculer $f(-1,2)$ et $f(3,4)$.

□

**Théorème 1 – Caractérisation des applications linéaires**

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Alors :

$$(\, f \text{ est linéaire}\,) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall (u,v) \in E \times E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)\,)$$

Pour une application linéaire, l'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images.

**Montrer qu'une application est linéaire**

Pour montrer que $f : E \longrightarrow F$ est linéaire :
- On explicite le vecteur $w = \lambda u + v$ ;
- On calcule $f(w)$ ;
- On s'assure que :

$$\begin{aligned} f(w) &= \dots \\ &= \dots \\ &= \lambda f(u) + f(v) \end{aligned}$$

où $(u,v) \in E \times E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Rédaction possible

Soit $(u,v) \in E \times E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On pose $w = \lambda u + v$ c'est à dire $w = \dots$.
Montrons que $f(w) = \lambda f(u) + f(v)$.
Par définition de $f$, on a :

$$\begin{aligned} f(w) &= \dots \\ &= \dots \\ &= \lambda f(u) + f(v) \end{aligned}$$

Ainsi, $f$ est linéaire.

On adaptera nos notations au contexte des espaces vectoriels dans lesquels on travaille.

□

**Exemple 1 – Application linéaire dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$**

Montrer que $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM - MA \end{array} \right.$ où $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, est une application linéaire.

□

**Proposition 1 – Image directe et réciproque d'un sous-espace**

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ c'est à dire $f : E \xrightarrow{\text{Linéaire}} F$. Alors :

**(1).** pour tout sous-espace $E_1$ de $E$, $f(E_1)$ est un sous-espace de $F$.

**(2).** pour tout sous-espace $F_1$ de $F$, $f^{-1}(F_1)$ est un sous-espace de $E$.

□

**Éléments de preuve:**
C'est une simple conséquence du fait que l'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images.

## 2. Propriétés structurelles des applications linéaires

**Proposition 2 – Structure vectorielle de $\mathcal{L}(E,F)$**

$\mathcal{L}(E,F)$ est un **sous-espace vectoriel** de l'ensemble des applications de $E$ dans $F$ muni des opérations :

$$f+g:\left|\begin{array}{lcl} E & \longrightarrow & F \\ u & \longmapsto & f(u)+g(u)\end{array}\right. \quad \text{et} \quad \lambda f:\left|\begin{array}{lcl} E & \longrightarrow & F \\ u & \longmapsto & \lambda f(u)\end{array}\right. \quad \text{où } \lambda\in\mathbb{R}$$

Le **vecteur nul** de $\mathcal{L}(E,F)$ est l'**application nulle** $\tilde{0}:\left|\begin{array}{lcl} E & \longrightarrow & F \\ u & \longmapsto & \vec{0}_F\end{array}\right.$.

□

**Proposition 3 – Composition et linéarité**

Si $f:E\overset{\text{Linéaire}}{\longrightarrow}F$ et $f:F\overset{\text{Linéaire}}{\longrightarrow}G$, alors $g\circ f:E\overset{\text{Linéaire}}{\longrightarrow}G$.

En d'autres termes : **la composée de deux applications linéaires, est linéaire.**

□

**Proposition 4 – Réciproque d'un isomorphisme**

Si $f:E\underset{\text{Bijective}}{\overset{\text{Linéaire}}{\longrightarrow}}F$ est linéaire et bijective, alors $f^{-1}:F\longrightarrow E$ est linéaire c'est à dire $f^{-1}\in\mathcal{L}(F,E)$.

En d'autres termes dès lors que les objets ont du sens : l'application réciproque d'une application linéaire est encore linéaire

**Composition de deux isomorphismes**

Si $f:E\underset{\text{Bijective}}{\overset{\text{Linéaire}}{\longrightarrow}}F$ et $g:F\underset{\text{Bijective}}{\overset{\text{Linéaire}}{\longrightarrow}}G$ sont deux **isomorphismes**, alors $g\circ f:E\underset{\text{Bijective}}{\overset{\text{Linéaire}}{\longrightarrow}}G$ est un **isomorphisme** et on a :

$$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$$

En d'autres termes : la composée de deux isomorphismes est un isomorphisme.

□

## 3. Image et noyau d'une application linéaire

**Contexte**

Désormais, dans toute la suite de ce document, sauf mention contraire, $f$ désignera un élément de $\mathcal{L}(E,F)$, c'est à dire $f : E \overset{\text{Linéaire}}{\longrightarrow} F$. □

**Définition 2 – Noyau et image pour $f : E \overset{\text{Linéaire}}{\longrightarrow} F$**

Noyau de $f$ - Sous-espace de $E$

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}(f) &= \left\{u \in E,\ f(u) = \overrightarrow{0}_F\right\} \\ &= f^{-1}\left(\left\{\overrightarrow{0}_F\right\}\right) \end{aligned}$$

Image de $f$ - Sous-espace de $F$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(f) &= \{v \in F,\ \exists u \in E,\ v = f(u)\} \\ &= \{f(u),\ u \in E\} \\ &= f(E) \end{aligned}$$

**Déterminer $\operatorname{Ker}(f)$ pour $f$ linéaire**

Pour déterminer $\operatorname{Ker}(f)$ pour $f : E \overset{\text{Linéaire}}{\longrightarrow} F$, on cherche à décrire les vecteurs $u \in E$ tels que $f(u) = \overrightarrow{0}_F$. Pour cela :

- on explicite $f(u)$ à partir d'une écriture de $u$ ;
- on « identifie » l'expression de $f(u)$ avec celle du vecteur nul $\overrightarrow{0}_F$ ;
- on écrit des conditions traduisant le fait que $f(u) = \overrightarrow{0}_F$.

On sera souvent ramené à la résolution d'un système linéaire.

Rédaction possible

Soit $u \in E$.
Par définition de $f$, on a $f(u) = \ldots$

$$\begin{aligned} (u \in \operatorname{Ker}(f)) &\Leftrightarrow \left(f(u) = \overrightarrow{0}_F\right) \\ &\Leftrightarrow \ldots \\ &\Leftrightarrow \ldots \\ &\Leftrightarrow \left(u = \overrightarrow{0} \text{ ou } u \in \operatorname{Vect}(\ldots) \text{ ou autre chose}\right) \end{aligned}$$

et ainsi $\operatorname{Ker}(f) = \ldots$. □

**Application| [3429] | 2| Dans $\mathbb{R}^3$**

On admet que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. Déterminer $\operatorname{Ker}(f)$ où :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y+z, 2x+y+z, x+2y) \end{array} \right.$$

□

**Application| [3430] | 3| Dans un espace de polynômes**

Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & \left(X^2-1\right)P'' + XP' \end{array} \right.$.

On admet que $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

Déterminer $\operatorname{Ker}(f)$.

□

**Proposition 5 – Famille génératrice de l'image pour $f : E \overset{\text{Linéaire}}{\longrightarrow} F$**

Si $E = \operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$, alors $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}\left(f(u_1), \ldots, f(u_p)\right)$.

En général, la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ utilisée est une base de $E$.

**Obtenir une base de l'image d'une application linéaire**

On prend une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de $E$ → $f(u_1) = \ldots$, $f(u_2) = \ldots$, $\vdots$, $f(u_n) = \ldots$ → On a alors : $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}\left(f(u_1), \ldots, f(u_n)\right)$ → On extrait une famille libre de $\left(f(u_1), \ldots, f(u_n)\right)$

□

**Application| [3432] | 4| Image d'une application linéaire**

On admet que $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & P+P' \end{array} \right.$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

**(1).** Déterminer $\operatorname{Im}(f)$.

**(2).** $f$ est-elle surjective ?

□

## 4 . Linéarité, injectivité et surjectivité

**Théorème 2 – Noyau, image, surjectivité et l'injectivité pour $f : E \overset{\text{Linéaire}}{\longrightarrow} F$**

**Caractérisation de l'injectivité**

$$(\, f \text{ est injective} \,) \quad \Leftrightarrow \quad \left( \operatorname{Ker}(f) = \left\{ \overrightarrow{0}_E \right\} \right)$$

**Caractérisation de la surjectivité**

$$(\, f \text{ est surjective} \,) \quad \Leftrightarrow \quad (\operatorname{Im}(f) = F\,)$$

□

**Point méthode 1 – Montrer qu'une application linéaire est injective**

$f \in \mathcal{L}(E,F)$ est injective ? → On détermine $\operatorname{Ker}(f)$

- → $\operatorname{Ker}(f) = \left\{ \overrightarrow{0}_E \right\}$ → $f$ est injective
- → $\operatorname{Ker}(f) \neq \left\{ \overrightarrow{0}_E \right\}$ → $f$ n'est pas injective

□

**Application|[3431]| 5| Étude de l'injectivité**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM - MA \end{array} \right.$.

On rappelle que $f \in \mathcal{L}(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$.

$f$ est-elle injective ?

□

# 5. Applications linéaires et familles de vecteurs

**Proposition 6 – Sur l'image d'une famille pour $f : E \overset{\text{Linéaire}}{\longrightarrow} F \ldots$**

Si $(u_1, \ldots, u_p)$ est une famille liée, alors $(f(u_1), \ldots, f(u_p))$ est une famille liée.

**Éléments de preuve:**
En effet, dès lors que :

$$\underbrace{\sum_{i \in I} \lambda_i u_i = \vec{0} \text{ avec les } (\lambda_i)_{i \in I} \text{ non tous nuls}}_{\text{Traduction du caractère lié de la famille } (u_i)_{i \in I}}$$

par linéarité de $f$, il vient que :

$$\underbrace{\sum_{i \in I} \lambda_i f(u_i) = \vec{0} \text{ avec les } (\lambda_i)_{i \in I} \text{ non tous nuls car}}_{\text{Traduction du caractère lié de la famille } (f(u_i))_{i \in I}}$$

$f(\vec{0}) = \vec{0}$.

Si $(f(u_1), \ldots, f(u_p))$ est une famille libre, alors $(u_1, \ldots, u_p)$ est une famille libre.

**Éléments de preuve:** En effet, si $\sum_{i \in i} \lambda_i u_i = \vec{0}$ en appliquant $f$ à cette égalité et par linéarité de $f$ il vient que : $\sum_{i \in I} \lambda_i f(u_i) = \vec{0}$ et comme la famille $(f(u_i))_{i \in I}$ est libre, il vient que les $(\lambda_i)_{i \in I}$ sont tous nuls et par suite la famille $(u_i)_{i \in I}$ est libre.

□

**Théorème 3 – Théorème fondamental**

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$, et $(b_1, \ldots, b_n)$ une famille quelconque de $F$.
Il existe une unique application linéaire $f : E \longrightarrow F$ telle que : $\forall i \in [\![1; n]\!], \quad f(e_i) = b_i$

$(f \text{ injective}) \Leftrightarrow \left( \begin{array}{c} (b_1, \ldots, b_n) \\ \text{libre} \end{array} \right)$

$(f \text{ surjective}) \Leftrightarrow \left( \begin{array}{c} (b_1, \ldots, b_n) \\ \text{génératrice} \end{array} \right)$

$(f \text{ bijective}) \Leftrightarrow \left( \begin{array}{c} (b_1, \ldots, b_n) \\ \text{base} \end{array} \right)$

□

# 6. Classification des espaces de dimension finie

**Définition 3 – Isomorphisme**

On dit que deux espaces vectoriels $E$ et $F$ sont isomorphes lorsqu'il existe un isomorphisme de $E$ dans $F$.

$\square$

**Application | [3433] | 6 | Espaces isomorphes**

Soient $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (a,b) & \longmapsto & a+\mathrm{i}\,b \end{array} \right.$ et $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_1[X] \\ (a,b) & \longmapsto & ax+b \end{array} \right.$.

On admet que $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}\right)$ et $g \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}_1[X]\right)$.

**(1).** Sont-elles injectives ?

**(2).** Sont-elles surjectives ?

**(3).** Qu'en conclure ?

$\square$

**Théorème 4 – Isomorphisme et dimension**

Si $E$ et $F$ sont isomorphes avec $E$ est de dimension **finie**, alors $F$ **l'est aussi**, et on a $\dim(E) = \dim(F)$.

$\square$

**Théorème 5 – Isomorphisme avec $\mathbb{R}^n$**

Si $E$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de **dimension finie** $n$, alors $E$ est isomorphe à $\mathbb{R}^n$.

$\square$

**Théorème 6 – Condition d'isomorphisme**

Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions **finies**.

$$(\,E \text{ et } F \text{ sont isomorphes}\,) \quad \Leftrightarrow \quad (\,\dim(E) = \dim(F)\,)$$

$\square$

**Application | [3434] | 7 | Caractère usuel des espaces isomorphes**

Parmi les espaces vectoriels suivants, lesquels sont isomorphes ?

$$\mathbb{R}^2 \;-\; \mathbb{R}_8[X] \;-\; \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;-\; \mathbb{R}^3 \;-\; \mathbb{R}_3[X] \;-\; \mathbb{R}^4 \;-\; \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \;-\; \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$$

$\square$

# 7. Rang d'une application linéaire

**Contexte**

Dans tout ce qui suit, sauf mention contraire, $f$ désignera un élément de $\mathcal{L}(E, F)$, c'est à dire $f : E \overset{\text{Linéaire}}{\longrightarrow} F$. □

**Théorème 7 – Dimension de l'image**

Si $f : E \overset{\text{Linéaire}}{\longrightarrow} F$ avec $E$ ou $F$ de dimension **finie**, alors $\mathrm{Im}\,(f)$ **l'est aussi**.

On appelle alors rang de $f$, et on note $\mathrm{rg}\,(f)$ la dimension de $\mathrm{Im}\,(f)$ : $\mathrm{rg}\,(f) = \dim\left(\mathrm{Im}\,(f)\right)$

□

**Éléments de preuve:**

**Proposition 7 – Image d'une famille génératrice et rang pour $f : E \overset{\text{Linéaire}}{\longrightarrow} F$**

Si $E$ est de dimension finie $n$ avec $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$,

alors : $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\,(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ et $\underbrace{\mathrm{rg}\,(f) = \mathrm{rg}\,(f(e_1), \ldots, f(e_n))}_{\text{Le rang de } f \text{ est égal au rang de la famille de vecteurs } (f(e_1), \ldots, f(e_n))}$

□

**Application | [3436] | 8 | Recherche de rang**

Soit $\varphi : \begin{array}{|rcl} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) - P(X-1) \end{array}$. On admet que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])$.

**(1).** Déterminer les images par $\varphi$ de la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

**(2).** En déduire le rang de $\varphi$.

□

# 8. Théorème du rang

**Théorème 8 – Théorème du rang**

Si $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $F$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f : E \xrightarrow{\text{Linéaire}} F$.
alors : $\underbrace{\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f)}_{\text{Théorème du rang}}$

où l'on rappelle que $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$.

**Ilustration**

Pour $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, on peut écrire : $\underbrace{\dim(\mathbb{R}^5)}_{=5} = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f)$.

Par exemple, si on a pu établir que $\mathrm{rg}(f) = 2$, on en déduit que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3$.

La connaissance de la dimension du noyau ou du rang d'une application linéaire permet de savoir « combien de vecteurs » on doit chercher pour déterminer des bases du noyau ou de l'image.

□

**Éléments de preuve:**
Les cas où $f$ est l'endomorphisme nul ou l'identité sont immédiats.
$E$ étant de dimension finie $n$, $\mathrm{Ker}(f)$ est dimension finie $p \leq n$. Soit alors $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
D'après le théorème de la base incomplète, il existe $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ non dans $\mathrm{Ker}(f)$ tels que $(e_1, \ldots, e_n)$ soit une base de $E$.
Or $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ et donc que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n))$ puisque les $p$ premiers vecteurs de la famille sont nuls étant l'image par $f$ d'éléments de $\mathrm{Ker}(f)$.
Montrons alors que $(f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n))$ est aussi une famille libre de $\mathrm{Im}(f)$.
Supposons alors que l'on a $\lambda_{p+1} f(e_{p+1}) + \ldots + \lambda_n f(e_n) = \vec{0}$. Par linéarité de $f$, il vient donc que $f(\lambda_{p+1} e_{p+1} + \ldots + \lambda_n e_n) = \vec{0}$. Ainsi $\lambda_{p+1} e_{p+1} + \ldots + \lambda_n e_n \in \mathrm{Ker}(f)$. Or une base de $\mathrm{Ker}(f)$ étant $(e_1, \ldots, e_p)$, on a nécessairement $\lambda_{p+1} = \ldots = \lambda_n = 0$ ce qui assure la liberté de la famille $(f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n))$, qui est donc une base de $\mathrm{Im}(f)$.
Par suite $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension $n - p$, c'est à dire $\mathrm{rg}(f) = n - p$.
Ainsi, on a bien $\underbrace{\dim(E)}_{=n} = \underbrace{\mathrm{rg}(f)}_{=n-p} + \underbrace{\dim(\mathrm{Ker}(f))}_{=p}$.

**Point méthode 2 – Exploiter le théorème du rang**

**Obtenir le rang d'une application linéaire**

Pour déterminer le rang d'une application linéaire $f$, on peut :
- rechercher une base de $\mathrm{Ker}(f)$ qui donnera $\dim(\mathrm{Ker}(f))$ ;
- utiliser ensuite le théorème du rang pour en déduire $\mathrm{rg}(f)$.

**Obtenir une base de $\mathrm{Im}(f)$**

À partir de $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$ :
- le théorème du rang nous donne $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$, c'est à dire le nombre de vecteurs nécessaires pour former une base de $\mathrm{Im}(f)$ ;
- on extrait alors une famille libre de $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ qui est déjà une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.

□

**Application|** [3437] **| 9| Base du noyau et de l'image**

Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (-2x+y+2z, -x+y+z, -2x+y+2z) \end{array} \right.$.

On admet que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

**(1).** Déterminer une base du noyau de $f$ ainsi que $\dim(\operatorname{Ker}(f))$.

**(2).** En déduire le rang de $f$, puis une base de $\operatorname{Im}(f)$.

□

# 9 . Caractérisation des isomorphismes à partir du rang

**Proposition 8 – Lien avec l'injectivité et la surjectivité**

Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de **dimensions finies** et $f : E \xrightarrow{\text{Linéaire}} F$. On a :

$$\operatorname{rg}(f) \leq \min(\dim(E), \dim(F))$$

**Éléments de preuve:**
En effet, $\operatorname{Im}(f)$ étant un sous-espace de $F$, nécessairement $\dim(\operatorname{Im}(f)) \leq \dim(F)$.
Par aileurs $\operatorname{Im}(f)$ étant engendré par l'image d'une base de $E$ par $f$, on a aussi $\dim(\operatorname{Im}(f)) \leq \dim(E)$.

$(\operatorname{rg}(f) = \dim(F)) \quad \Leftrightarrow \quad (f$ est **surjective**$)$

**Éléments de preuve:**
$\operatorname{Im}(f)$ étant un sous-espace de $F$ avec égalité avec $F$ si et seulement si les dimensions sont égales. Or $f$ est surjective si, et seulement si, $\operatorname{Im}(f) = F$.

$(\operatorname{rg}(f) = \dim(E)) \quad \Leftrightarrow \quad (f$ est **injective**$)$

**Éléments de preuve:**
C'est une conséquence du théorème du rang.
L'injectivité assurera que $\dim(\operatorname{Ker}(f)) = 0$ et donc que $\operatorname{rg}(f) = \dim(E)$.
Réciproquement, si $\operatorname{rg}(f) = \dim(E)$, nécessairement $\dim(\operatorname{Ker}(f)) = 0$ et donc $\operatorname{Ker}(f) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ ce qui donne l'injectivité.

□

**Théorème 9 – Théorème caractéristique des isomorphismes en dimension finie**

Soit $f : E \overset{\text{Linéaire}}{\longrightarrow} F$ où $E$ et $F$ sont tels que $\dim(E) = \dim(F)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

| | | |
|---|---|---|
| $f$ est bijective | $f$ est injective | $f$ est surjective |
| $\operatorname{rg}(f) = \dim(E) = \dim(F)$ | $f$ envoie une base de $E$ sur une base de $F$ | |

□

**Théorème 10 – Théorème caractéristique des automorphismes en dimension finie**

Soit $f : E \overset{\text{Linéaire}}{\longrightarrow} E$ où $E$ est de dimension finie. Les assertions suivantes sont équivalentes :

| | | |
|---|---|---|
| $f$ est bijective | $f$ est injective | $f$ est surjective |
| $\operatorname{rg}(f) = \dim(E)$ | $f$ envoie une base de $E$ sur une base de $E$ | |

□

**Point méthode 3 – Montrer qu'une application linéaire est bijective en dimension finie**

Pour montrer que $f : E \overset{\text{Linéaire}}{\longrightarrow} F$ ou $f : E \overset{\text{Linéaire}}{\longrightarrow} E$ est bijective en dimension finie, on se contentera de montrer son caractère injectif, ou son caractère surjectif ou on comparera son rang à la dimension des espaces considérés. □

**Application| [3438] | 10| Étude du caractère bijectif**

Les applications linéaires suivantes sont-elles bijectives ?

**(1).** $f_1 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & (x^2-1)\,P'' + P \end{array} \right.$

**(2).** $f_2 : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM - MA \end{array} \right.$ pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

**(3).** $f_3 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P + (x-1)P' \end{array} \right.$

**(4).** $f_4 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & P(x+1) - P(x-1) \end{array} \right.$

□