RA02

Raisonnement par récurrence et suites

Version du 09-11-2022 à 09:40

Contexte

L'objet de ce document consiste en reprendre les différents éléments développés en cours ou en exercice, en ce qui concerne la recherche de l'expression du terme général d'une suite et dont ont justifie le résultat à l'aide de raisonnements par récurrence.

□

1. Suite où « u_{n+1} est exprimé en fonction de u_n »

Point méthode 1 – Montrer une formule de terme général par récurrence

Cadre de travail		Objectif
u_0 est connu	u_{n+1} s'exprime en fonction de u_n	Exprimer u_n en fonction de n

On peut utiliser un raisonnement par **« récurrence simple »** :

Étape 1 | Expliciter $\mathcal{P}(n)$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit : $\mathcal{P}(n)$: « u_n = une expression qui ne dépend que de n »

Étape 2 | Mise en place de la récurrence

Initialisation | Vérifier que la proposition est vraie au rang 0

Il faudra s'assurer ici que la valeur donnée pour u_0 correspond à celle que l'on obtient par le calcul avec la formule proposée.

Hérédité | on fixe $n \in \mathbb{N}$ et on suppose que l'on a $\mathcal{P}(n)$

On doit montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Il s'agira ici d'utiliser la relation initiale entre u_{n+1} et u_n donnée par la définition de la suite dans la laquelle on réinvestira obligatoirement l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(n)$

Conclusion

on n'oublie pas de conclure...

□

Exemple 1 – Cas où u_{n+1} est fonction de u_n

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par les relations : $\begin{cases} u_0 & = & 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} & = & \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{5}{3} \end{cases}$

Montrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 5.$

□

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la proposition $\mathcal{P}(n)$ par : $\qquad \mathcal{P}(n)$: « $u_n = -2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 5$ »

On va montrer par récurrence simple sur l'entier n que l'assertion $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Initialisation : montrons que la proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie, c'est à dire que u_0 vaut bien $-2\left(\dfrac{2}{3}\right)^0 + 5$.

On a :
- $u_0 = 3$ d'après la définition de la suite ;
- Par ailleurs, on a : $$\begin{aligned} -2\left(\frac{2}{3}\right)^0 + 5 &= -2 \times 1 + 5 \\ &= -2 + 5 \\ &= 3 \end{aligned}$$

et ainsi on a bien que $u_0 = -2\left(\dfrac{2}{3}\right)^0 + 5$, c'est à dire la proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$, c'est à dire que $u_n = -2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 5$.

Montrons, sous cette hypothèse que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$, c'est à dire que $u_{n+1} = -2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} + 5.$

Par définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a : $\quad u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{5}{3}$.

Or, par hypothèse de récurrence, $u_n = -2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 5$.

Il vient ainsi que : $$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{2}{3}\left(-2\left(\frac{2}{3}\right)^n + 5\right) + \frac{5}{3} \\ &= -2\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \frac{2}{3} \times 5 + \frac{5}{3} \\ &= -2\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 5 \end{aligned}$$

ce qui est bien la proposition $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : la proposition $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 0 et héréditaire, par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n.

On en conclut donc que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 5$.

2. Suite où « u_{n+1} est exprimé en fonction de plusieurs termes précédents »

Point méthode 2 – Montrer une formule de terme général par récurrence

Cadre de travail		Objectif
les premiers termes de la suite sont connus	u_{n+1} s'exprime en fonction de plusieurs termes précédents	Exprimer u_n en fonction de n

On peut utiliser un raisonnement par **« récurrence double »** ou **« récurrence forte »** :

Étape 1 | Expliciter la proposition $\mathcal{P}(n)$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit : $\mathcal{P}(n) \quad : \quad u_n \quad = \quad$ une expression qui ne dépend que de n

Étape 2 | Mise en place de la récurrence

Initialisation | Vérifier que la proposition est vraie pour les premiers rangs de la suite

Il faudra s'assurer ici que la valeur donnée pour pour les premiers rangs de la suite correspond à ce que l'on obtient par le calcul avec la formule proposée.

Hérédité | on fixe $n \in \mathbb{N}$ et on suppose que l'on a...

$\mathcal{P}(n-1)$ et $\mathcal{P}(n)$

pour une récurrence double

$\mathcal{P}(0), \dots, \mathcal{P}(n)$

pour une récurrence forte

On doit montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Il s'agira ici d'utiliser la relation initiale entre u_{n+1} et les termes précédents donnée par la définition de la suite dans la laquelle on réinvestira obligatoirement l'hypothèse de récurrence.

Conclusion

on n'oublie pas de conclure...

□

Exemple 2 – Cas où u_{n+1} est fonction de u_n et u_{n-1}

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par les relations : $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 5 \\ u_1 & = & 18 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} & = & 6u_n - 9u_{n-1} \end{array}\right.$

Montrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (n+5)3^n$.

□

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la proposition $\mathcal{P}(n)$ par : $\quad \mathcal{P}(n) : \quad u_n = \boxed{u_n = (n+5)3^n}$

On va montrer par récurrence double sur l'entier n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Initialisation : montrons que les propositions $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies, c'est à dire que u_0 et u_1 sont bien égaux à $(0+5)3^0$ et $(1+5)3^1$.

On a :

- $u_0 = 5$ par définition de la suite.
- $u_1 = 18$ par définition de la suite.
- On a : $\begin{array}{rcl} (0+5)3^0 & = & 5 \times 1 \\ & = & 5 \end{array}$ et $\begin{array}{rcl} (1+5)3^1 & = & 6 \times 3 \\ & = & 18 \end{array}$

On a donc bien $u_0 = (0+5)3^0$ et $u_1 = (1+5)3^1$, c'est à dire que $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.

Hérédité soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n-1)$ et $\mathcal{P}(n)$, c'est à dire que $u_{n-1} = ((n-1)+5)3^{n-1}$ et $u_n = (n+5)3^n$.

Montrons, sous cette hypothèse, que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$ c'est à dire $u_{n+1} = ((n+1)+5)3^{n+1}$.

Par définition de la suite, on a : $\quad u_{n+1} = 6u_n - 9u_{n-1}$. Par hypothèse de récurrence on a $u_{n-1} = ((n-1)+5)3^{n-1}$ et $u_n = (n+5)3^n$. Ainsi, il vient que :

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & 6u_n - 9u_{n-1} \\ & = & 6 \times (n+5)3^n - 9 \times ((n-1)+5)3^{n-1} \\ & = & 2 \times 3 \times (n+5)3^n - 3^2 \times ((n-1)+5)3^{n-1} \\ & = & 2 \times (n+5)3^{n+1} - ((n-1)+5)3^{n+1} \\ & = & (2(n+5) - ((n-1)+5))\, 3^{n+1} \\ & = & ((n+1)+5)\, 3^{n+1} \end{array}$$

ce qui est bien $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : la proposition $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 0 et au rang 1 et héréditaire, par le principe de récurrence double, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Ainsi, on a bien : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (n+5)3^n$.