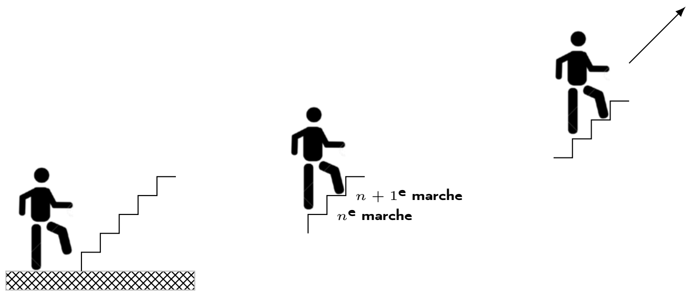
RA01

Effectuer un raisonnement par récurrence

Version du 09-11-2022 à 09:06

1. Le principe général du raisonnement par récurrence

Introduction – Version imagée du raisonnement par récurrence



Si je sais monter sur la première marche de l'escalier. . . | et si je sais passer de la n^{e} marche à la $n+1^{\text{e}}$ marche. . . | je suis capable de monter aussi haut que je veux!

☐

Théorème 1 – Récurrence faible - Initialisation à zéro

Soit $\mathcal{P}(n)$ une **assertion** dépendant de $n \in \mathbb{N}$.
Si on a :

Initialisation de récurrence au rang 0

$\mathcal{P}(0)$ est **vraie**.

Hérédité et hypothèse de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1).$$

alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est **vraie**.

☐

Exemple 1 – Utilisation d'une récurrence | Nature des assertions démontrées

une **formule**

$$\forall n \in \mathbb{N}, \underbrace{\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}_{\mathcal{P}(n)}$$

une **inégalité**

$$\forall n \in \mathbb{N}, \underbrace{n^2 \leq 2^n}_{\mathcal{P}(n)}$$

une **affirmation**

$$\forall n \in \mathbb{N}, \underbrace{3^{2n+1} + 2^{n+2} \text{ est un multiple de } 7}_{\mathcal{P}(n)}$$

☐

Théorème 2 – Récurrence faible - Initialisation à partir d'un certain rang

Soit $\mathcal{P}(n)$ une **assertion** dépendant de $n \in \mathbb{N}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$.
Si on a :

Initialisation de récurrence au rang n_0	Hérédité et hypothèse de récurrence
$\mathcal{P}(n_0)$ est **vraie**.	$\forall n \geq n_0, \quad \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.

alors pour tout $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n)$ est **vraie**.

□

Point méthode 1 – Mettre en place un raisonnement par récurrence - Initialisation au rang n_0

Lorsque l'on effectue et que l'on rédige un raisonnement par récurrence, on mettra en avant clairement les différentes étapes de son raisonnement :

Explicitation de la propriété

L'**assertion** $\mathcal{P}(n)$ que l'on souhaite démontrer et le rang à partir duquel on le fait.

Quel escalier veut-on gravir ? Et à partir de quelle marche ?

Initialisation

L'**initialisation**, c'est à dire la vérification que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.

On s'assure de pouvoir monter sur l'escalier.

Hérédité

L'**hérédité** de l'assertion : pour $n \geq n_0$, a-t-on $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$?

On regarde si l'on sait passer de la n^{e} marche à la $n+1^{\text{e}}$ marche

Conclusion

La **conclusion** où l'on annonce clairement que l'assertion $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Je suis donc capable de parcourir tout l'escalier.

Remarque fondamentale sur l'hérédité

Établir l'hérédité lors d'un raisonnement par récurrence est une **VRAIE DEMONSTRATION**.

On doit **OBLIGATOIREMENT** utiliser l'hypothèse de récurrence car sinon...c'est que l'on n'a pas besoin de faire un raisonnement par récurrence !

□

Exemple 2 – Démontrer une formule par récurrence

?

Montrer par récurrence que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition

Initialisation : on vérifie que $\mathcal{P}(0)$ est vraie c'est à dire que

Hérédité : soit

On suppose que l'on a

Montrons, sous cette hypothèse, que l'on a

Conclusion : la propriété $\mathcal{P}(n)$

on en conclut par le principe de récurrence que

$\square$

Application| [3678] | **1**| **Récurrence**

Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 5^{n+2} \geq 4^{n+2} + 3^{n+2}$$

$\square$

Application| [3679] | **2**| **Récurrence**

Démontrer par récurrence sur l'entier n que :

$$\forall n \geq 10, \quad 2^n \geq 100n$$

$\square$

Application| [3680] | **3**| **Récurrence**

Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$

On pourra au préalable exprimer la somme $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1)$ *à l'aide du symbole* $\sum$.

$\square$

2. Récurrence double

Théorème 3 – Récurrence double

Soit $\mathcal{P}(n)$ une **assertion** dépendant de $n \in \mathbb{N}$.
Si on a :

Initialisation de récurrence aux rangs 0 et 1	Hérédité et hypothèse de récurrence
$\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont **vraies**.	$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)) \Rightarrow \mathcal{P}(n+2)$.

alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est **vraie**.

□

Exemple 3 – Récurrence double

?

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \end{cases}$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$.

Pour n entier naturel, on désigne par $\mathcal{P}(n)$ l'assertion :

Initialisation : On vérifie que

•

•

Hérédité : soit

Supposons que l'on a

Montrons que, sous cette hypothèse, on a

Conclusion : la propriété $\mathcal{P}(n)$

on en déduit que

□

Application| [3681] | 4| Récurrence double

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 2 \\ u_1 &= 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} &= 3u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + 2^n$.

□

Application| [3682] | 5| Suite de Fibonacci

Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite donnée par :

$$\begin{cases} F_0 &= 1 \\ F_1 &= 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} &= F_n + F_{n+1} \end{cases}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n \geq 0$.

□

3. La récurrence « forte »

Théorème 4 – Récurrence forte

Soit $\mathcal{P}(n)$ une **assertion** dépendant de $n \in \mathbb{N}$.

Si on a :

Initialisation au rang 0	Hérédité et hypothèse de récurrence
$\mathcal{P}(0)$ est **vraie**.	$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), \ldots, \mathcal{P}(n)) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.

alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est **vraie**.

□

Exemple 4 – Récurrence forte

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_0 + \ldots + u_n \end{cases}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2^n$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $\mathcal{P}(n)$ la proposition :

Initialisation :

Hérédité : soit

Supposons que l'on a

Montrons, sous cette hypothèse, que l'on a

Conclusion : la propriété $\mathcal{P}(n)$

on en déduit que

□