CL02

Opérations avec les complexes

Version du 28-09-2022 à 09:28

Contexte

Dans tous les énoncés qui suivent, les complexes écrits seront supposés écrits sous forme algébrique.
Ainsi l'écriture générique $z = a + \mathrm{i}\, b$ désignera un complexe écrit sous forme algébrique avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1. Règles opératoires dans $\mathbb{C}$

Théorème 1

Le nombre i

$$\mathrm{i}^2 = -1$$

Addition et multiplication

On définit l'addition et la multiplication de deux complexes en étendant à $\mathbb{C}$ les règles opératoires portant sur ces opérations dans $\mathbb{R}$.

Conjugaison | Pour $z = a + \mathrm{i}\, b$

$\overline{z} = a - \mathrm{i}\, b$ | $\overline{\overline{z}} = z$

Recherche d'inverse dans $\mathbb{C}$

Tout complexe z non nul admet un inverse noté $\dfrac{1}{z}$.

Identité remarquable | Pour $z = a + \mathrm{i}\, b$

$$\begin{aligned} z \times \overline{z} &= (a + \mathrm{i}\, b)\,(a + \mathrm{i}\, b) \\ &= \underbrace{a^2 + b^2}_{\in \mathbb{R}_+} \end{aligned}$$

Transformation d'écriture

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z} \times \frac{\overline{z}}{\overline{z}}$$

Exemple 1 – Puissances de i

$\mathrm{i}^0 =$	$\mathrm{i}^1 =$	$\mathrm{i}^2 =$	$\mathrm{i}^3 =$	$\mathrm{i}^4 =$	$\mathrm{i}^5 =$
$\mathrm{i}^6 =$	$\mathrm{i}^7 =$	$\mathrm{i}^8 =$	$\mathrm{i}^9 =$	$\mathrm{i}^{10} =$	$\mathrm{i}^{11} =$

Exemple 2 – Identités remarquables dans $\mathbb{C}$

$(1 + \mathrm{i})^2 =$

$(1 - \mathrm{i})^2 =$

$(2+3\mathrm{i})^2 =$

$(1-2\mathrm{i})^2 =$

□

Exemple 3 – Forme algébrique de l'inverse d'un complexe

$\dfrac{1}{2-\mathrm{i}} =$

$\dfrac{1}{1+3\mathrm{i}} =$

$\dfrac{1}{2+3\mathrm{i}} =$

$\dfrac{1}{4-3\mathrm{i}} =$

□

Exemple 4 – Produit et quotient de complexes

$(2-\mathrm{i})(4+3\mathrm{i}) =$

$(3+4\mathrm{i})(2-5\mathrm{i}) =$

$(2-\mathrm{i})(4+3\mathrm{i})(4-\mathrm{i}) =$

$(2-\mathrm{i})(4+3\mathrm{i})(4-\mathrm{i})(-3-2\mathrm{i}) =$

$\dfrac{3+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}} =$

$\dfrac{2-3\mathrm{i}}{1+3\mathrm{i}} =$

□

2. Quelques calculs « longs » dans $\mathbb{C}$

Exemple 5 – Donner le résultat sous forme algébrique

$$\frac{(1+2\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})}{2-\mathrm{i}} =$$

$$\frac{4-\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}} - \frac{2-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} =$$

$$\frac{(4+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{2-\mathrm{i}} - \frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} =$$

$$\frac{3-2\mathrm{i}}{(2-\mathrm{i})(4-\mathrm{i})} + \frac{(1-\mathrm{i})(3+\mathrm{i})}{(1+2\mathrm{i})(2-\mathrm{i})} =$$

□