CL01

Sommes téléscopiques

Version du 21-09-2022 à 08:51

1. Téléscopages de termes

Proposition 1

On considère x_0, x_1, …, x_n et x_{n+1} des nombres.

Le premier moins le dernier…

$$\sum_{k=0}^{n} (x_k - x_{k+1}) = x_0 - x_{n+1}$$

Le dernier moins le premier…

$$\sum_{k=0}^{n} (x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_0$$

L'indexation peut commencer à 1, 2 ou plus, cela ne change pas le principe de simplification de la somme.

Justification | Visualisation

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} (x_k - x_{k+1}) &= (x_0 - x_1) + (x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) + \ldots + (x_{n-1} - x_n) + (x_n - x_{n+1}) \\
&= x_0 \underbrace{- x_1 + x_1}_{=0} \underbrace{- x_2 + x_2}_{=0} \underbrace{- x_3 + \ldots\ldots\ldots + x_{n-1}}_{=0 \text{ en regroupant les termes deux à deux}} \underbrace{- x_n + x_n}_{=0} - x_{n+1} \\
&= x_0 - x_{n+1}
\end{aligned}$$

Illustration

$$\begin{aligned}
\sum_{k=4}^{11} (\ln(k) - \ln(k+1)) &= \ln(4) - \ln(11+1) \\
&= \ln(4) - \ln(12) \\
&= \ln(2\times 2) - \ln(2\times 2\times 3) \\
&= \ln(2) + \ln(2) \\
&\qquad - \ln(2) - \ln(2) - \ln(3) \\
&= \ln(3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{8} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right) &= \frac{1}{8+1} - \frac{1}{1} \\
&= \frac{1}{9} - 1 \\
&= -\frac{8}{9}
\end{aligned}$$

□

Exemple 1

Calculer $\sum_{k=8}^{19} (\ln(k) - \ln(k-1))$

Calculer $\sum_{k=11}^{54} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1}\right)$

Calculer $\sum_{k=3}^{16} \left(\frac{k}{k+1} - \frac{k-1}{k}\right)$

Calculer $\sum_{k=2}^{9} (k^2 - (k+1)^2)$

Calculer $\sum_{k=3}^{9} (2^k - 2^{k+1})$

Calculer $\sum_{k=5}^{13} \left(\ln\left(\frac{1}{k+1}\right) - \ln\left(\frac{1}{k+2}\right)\right)$

□

2. Téléscopages plus élaborés

Exemple 2

Calculer...

$$\sum_{k=6}^{15} \ln\left(\frac{(k+1)(k+3)}{k(k+2)}\right)$$

On commence par remarquer que :

$$\ln\left(\frac{(k+1)(k+3)}{k(k+2)}\right) =$$

On en déduit alors que :

$$\sum_{k=6}^{15} \ln\left(\frac{(k+1)(k+3)}{k(k+2)}\right) =$$

□

Exemple 3

Calculer...

$$\sum_{k=5}^{19} \frac{2}{k^3-k}$$

On commence par remarquer que :

$$\frac{2}{k^3-k} = \frac{1}{k-1} - \frac{2}{k} + \frac{1}{k+1}$$

On en déduit alors que :

$$\sum_{k=5}^{19} \frac{2}{k^3-k} =$$

□

Exemple 4

Calculer...

$$\sum_{k=2}^{16} \frac{2}{k(k+1)(k+2)}$$

On commence par remarquer que :

$$\frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+2} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k}$$

On en déduit alors que :

$$\sum_{k=2}^{16} \frac{2}{k(k+1)(k+2)} =$$

□

Exemple 5

Calculer...

$$\sum_{k=3}^{19} \ln\left(\frac{k^2}{(k+1)(k-1)}\right)$$

On commence par remarquer que :

$$\ln\left(\frac{k^2}{(k+1)(k-1)}\right) =$$

On en déduit alors que :

$$\sum_{k=3}^{19} \ln\left(\frac{k^2}{(k+1)(k-1)}\right) =$$

□