

Manipulation du symbole Σ

Version du 21-09-2022 à 08:52

1. Sommes de références et sommes tronquées

Proposition 1 – Sommes de référence

Somme des $n + 1$ premiers entiers

$$\sum_{\substack{k=0 \\ \text{ou } 1}}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(0) + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + (n-2) + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Somme d'une progression géométrique

$$\sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } q = 1 \\ \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$$

$$\underbrace{1}_{=q^0} + \underbrace{q}_{=q^1} + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} + q^n \quad \text{pour } q \neq 1 = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Somme des $n + 1$ premiers carrés

$$\sum_{\substack{k=0 \\ \text{ou } 1}}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Résultat qui n'est pas à connaître

Somme des $n + 1$ premiers cubes

$$\sum_{\substack{k=0 \\ \text{ou } 1}}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

Résultat qui n'est pas à connaître

Sommes tronquées



Lorsque l'indice de départ de l'une de ces sommes n'est pas 0 ou 1, on parle de « sommes tronquées ».



On ne peut donc pas utiliser ces formules ci-dessus sur une somme tronquée !

Relation de Chasles pour une somme | Illustration sur une somme de référence

$$\sum_{k=0}^{24} k = \sum_{k=0}^{14} k + \sum_{k=15}^{24} k$$

$$\text{Donc : } \sum_{k=15}^{24} k = \sum_{k=0}^{24} k - \sum_{k=0}^{14} k$$

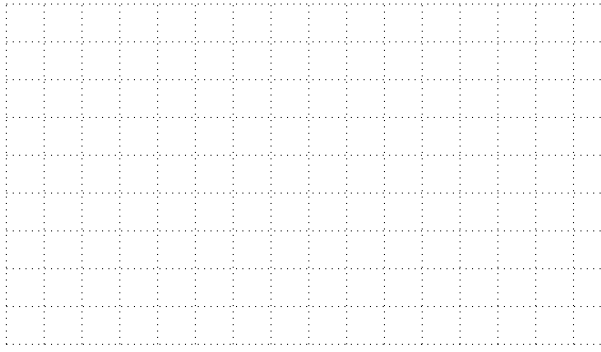
$$\sum_{k=0}^{18} 2^k = \sum_{k=0}^9 2^k + \sum_{k=10}^{18} 2^k$$

$$\text{Donc : } \sum_{k=10}^{18} 2^k = \sum_{k=0}^{18} 2^k - \sum_{k=0}^9 2^k$$

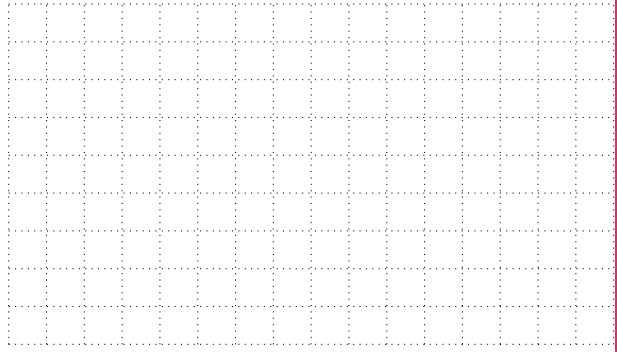
□

Exemple 1

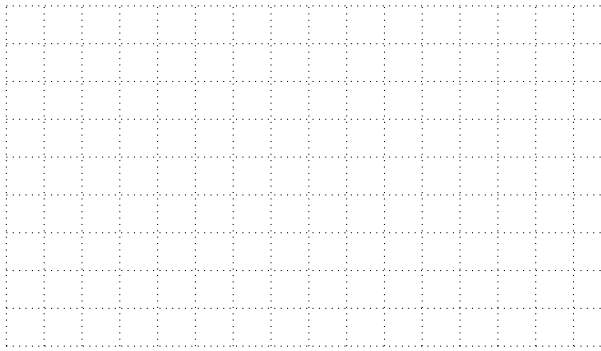
Calculer $\sum_{k=8}^{19} k$



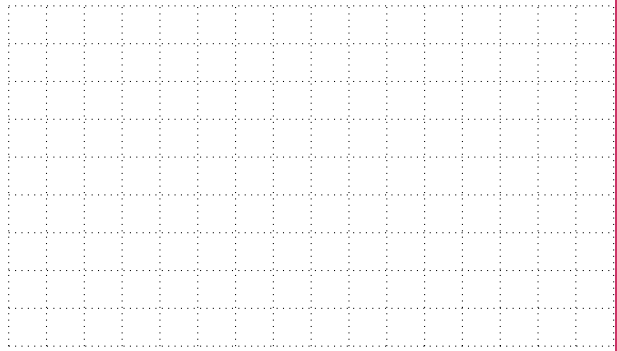
Calculer $\sum_{k=11}^{54} k$



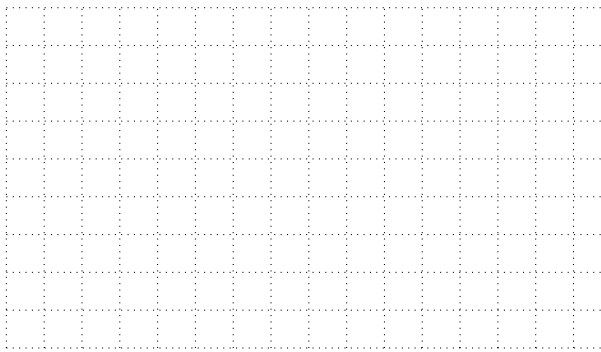
Calculer $\sum_{k=3}^9 k^2$



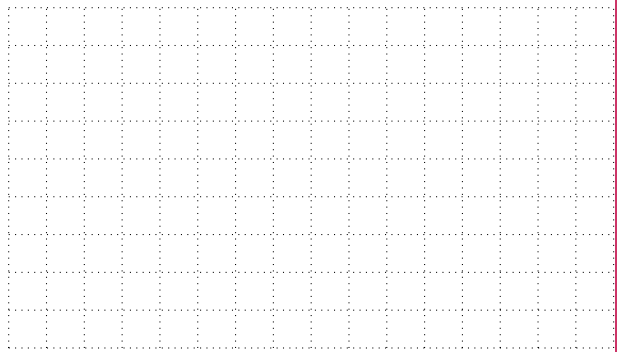
Calculer $\sum_{k=11}^{21} k^2$



Calculer $\sum_{k=5}^{17} k^3$



Calculer $\sum_{k=8}^{24} k^3$



Calculer $\sum_{k=2}^9 2^k$

Calculer $\sum_{k=3}^8 3^k$

□

2. Caractère linéaire du symbole \sum

Proposition 2 – Linéarité de la somme

$$\sum_{k=p}^q (\lambda u_k + v_k) = \lambda \left(\sum_{k=p}^q u_k \right) + \left(\sum_{k=p}^q v_k \right)$$

$$\sum_{k=p}^q (\lambda \blacksquare + \blacktriangledown) = \lambda \left(\sum_{k=p}^q \blacksquare \right) + \left(\sum_{k=p}^q \blacktriangledown \right)$$

Illustration

$$\sum_{k=9}^{21} (k + k^2) =$$

$$\sum_{k=9}^{21} (3k + 4k^2) =$$

□

Exemple 2

Calculer $\sum_{k=2}^{10} \frac{k-4}{3}$

Calculer $\sum_{k=2}^{10} (2k + k^2 - 1)$

Calculer $\sum_{k=1}^n k(k+1)$

Calculer $\sum_{k=1}^5 (2^k + 5^{7-k})$

Calculer $\sum_{k=2}^8 4k(k^2 + 2)$

Calculer $\sum_{k=2}^9 (7^k + 4k - 2)$

□