AN05

Utiliser les sommes de séries usuelles

Version du 16-03-2023 à 09:14

Contexte

Dans tout ce qui suit, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite numérique.
On désigne par $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série numérique $\sum u_n$, c'est à dire :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\, S_n &= u_0 + u_1 + \ldots + u_n \\ &= \sum_{k=0}^{n} u_k\end{aligned}$$

On rappelle que l'on dit que la série numérique $\sum u_n$ est convergente lorsque la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, c'est à dire lorsque $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S \in \mathbb{R}$ et on note alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S$ appellée somme de la série $\sum u_n$. □

1. Les séries de références

Théorème 1 – Somme des séries de référence

Série exponentielle

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$

En particulier, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}$

Série géométrique

Pour tout $q \in \mathbb{R}$ tel que $|q| < 1$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

En particulier, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$

Série géométrique dérivée d'ordre 1

Pour tout $q \in \mathbb{R}$ tel que $|q| < 1$:
$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

On pourra remarquer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} nq^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1}$.

Série géométrique dérivée d'ordre 2

Pour tout $q \in \mathbb{R}$ tel que $|q| < 1$:
$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

On pourra remarquer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2}$.

□

Exemple 1 – Utiliser la série exponentielle pour calculer la somme d'une série

Déterminer l'expression de la suite des sommes partielles de la série $\sum \frac{n^2-1}{n!}$, puis établir sa convergence et en déterminer la somme

□

On considère la suite $(u_n)_{n\geq \dots}$ définie par : $\forall n \boxed{\quad}$, $u_n = \boxed{\quad}$.

Expression du terme général de la suite des sommes partielles : On commence par remarquer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n^2-1 = \boxed{\quad}\ n\,(n-1) + \boxed{\quad}\ n + \boxed{\quad}$$

Ainsi, en reportant cette relation dans l'expression de $(S_n)_{n\geq \dots}$, on a :

$$\begin{aligned} \forall n \boxed{\quad},\ S_n &= \sum_{k=\dots}^{n} \frac{\dots k(k-1) + \dots k + \dots}{k!} \\ &= \dots \sum_{k=\dots}^{n} \frac{k(k-1)}{k!} + \dots \sum_{k=\dots}^{n} \frac{k}{k!} + \sum_{k=\dots}^{n} \frac{\dots}{k!} \end{aligned}$$

On sait que : $\forall k \boxed{\quad}$, $k! = \boxed{\quad} \times \left(\boxed{\quad}\right)!$

mais aussi que : $\forall k \boxed{\quad}$, $k! = \boxed{\quad} \times \left(\boxed{\quad}\right)!$

On en déduit alors que :

$$\begin{aligned} \forall n \boxed{\quad},\ S_n &= \dots \sum_{k=\dots}^{n} \frac{k(k-1)}{k!} + \dots \sum_{k=\dots}^{n} \frac{k}{k!} + \sum_{k=\dots}^{n} \frac{\dots}{k!} \\ &= \dots \sum_{k=\dots}^{n} \frac{1}{(k-2)!} + \dots \sum_{k=\dots}^{n} \frac{1}{(k-1)!} + \sum_{k=\dots}^{n} \frac{\dots}{k!} \end{aligned}$$

et en effectuant des changements d'indices, on obtient que :

$$\forall n \boxed{\quad},\ S_n = \dots \sum_{i=\dots}^{\dots} \frac{1}{i!} + \dots \sum_{j=\dots}^{\dots} \frac{1}{j!} + \sum_{k=\dots}^{\dots} \frac{\dots}{k!}$$

Comme on sait que : $\displaystyle\sum_{n=\dots}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}$, on a alors :

$$S_n = \dots \underbrace{\sum_{i=0}^{\dots} \frac{1}{i!}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dots} + \dots \underbrace{\sum_{j=0}^{\dots} \frac{1}{j!}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dots} + \underbrace{\sum_{k=\dots}^{\dots} \frac{\dots}{k!}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dots} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \boxed{\quad}$$

La suite des sommes partielles de la série $\sum \frac{n^2-1}{n!}$ étant convergente, on en déduit par définition que la série $\sum \frac{n^2-1}{n!}$ est convergente, et que sa somme est $\displaystyle\sum_{n=\dots}^{+\infty} \frac{n^2-1}{n!} = \boxed{\quad}$.

Exemple 2 – Utiliser les séries géométriques pour calculer la somme d'une série

Déterminer l'expression de la suite des sommes partielles de la série $\sum (n^2-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$, puis établir sa convergence et en déterminer la somme

---

On considère la suite $(u_n)_{n\geq\ldots}$ définie par : $\forall n \ldots$, $u_n = \ldots$.

Expression du terme général de la suite des sommes partielles : On commence par remarquer que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ n^2-1 = \ldots\ n\,(n-1) + \ldots\ n + \ldots$$

Ainsi, en reportant cette relation dans l'expression de $(S_n)_{n\geq\ldots}$, on a :

$$\begin{aligned}\forall n \ldots,\ S_n &= \sum_{k=\ldots}^{n} (\ldots k(k-1)+\ldots k+\ldots)\left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \ldots\sum_{k=\ldots}^{n} k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k + \ldots\sum_{k=\ldots}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^k + \ldots\sum_{k=\ldots}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k\end{aligned}$$

Quel dommage qu'il n'y ait pas écrit $\sum_{k=\ldots}^{n} k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}$ au lieu de $\sum_{k=\ldots}^{n} k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\ldots$

De même on aurait aimer avoir $\sum_{k=\ldots}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ au lieu de $\sum_{k=\ldots}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\ldots$

Il suffit de factoriser par $\frac{1}{2}\ldots$

En factorisant par $\ldots$ dans la première somme et par $\ldots$ dans la deuxième, on obtient :

$$\forall n \ldots,\ S_n = \ldots\ldots\sum_{k=\ldots}^{n} k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + \ldots\ldots\sum_{k=\ldots}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + \ldots\sum_{k=\ldots}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Comme on sait que : $\sum_{n=\ldots}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \ldots$, que $\sum_{n=\ldots}^{+\infty} nq^{n-1} = \ldots$ et que $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \ldots$ pour tout $|q|<1$,

on a puisque $\ldots$:

$$\sum_{n=\ldots}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \ldots,\quad \sum_{n=\ldots}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \ldots,\quad \sum_{n=\ldots}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} = \ldots$$

et ainsi, il vient que :

$$S_n = \ldots\ldots\underbrace{\sum_{k=\ldots}^{\ldots} k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ldots} + \ldots\ldots\underbrace{\sum_{k=\ldots}^{\ldots} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ldots} + \ldots\underbrace{\sum_{k=\ldots}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ldots$$

La suite des sommes partielles de la série $\sum (n^2-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$ étant convergente, on en déduit par définition que la série $\sum (n^2-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$ est convergente, et que sa somme est $\sum_{n=\ldots}^{+\infty}(n^2-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n = \ldots$.

2. Mise en oeuvre

Application| [4890] | 1| Somme d'une série numérique

On se propose dans cette série de déterminer la somme S de la série numérique $\sum \frac{n^2-2n+2}{2^n}$.

(1). Déterminer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n^2-2n+2 = an(n-1)+bn+c$.

(2). Déterminer une expression du terme général de la suite des sommes partielles de la série $\sum \frac{n^2-2n+2}{2^n}$.

(3). En déduire la convergence et la somme de la série $\sum \frac{n^2-2n+2}{2^n}$.

$\square$

Application| [4891] | **2**| **Somme d'une série numérique**

On se propose dans cette série de déterminer la somme S de la série numérique $\sum \frac{n^2-2n+2}{n!}$.

(1). Déterminer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n^2-2n+2 = an(n-1)+bn+c$.

(2). Déterminer une expression du terme général de la suite des sommes partielles de la série $\sum \frac{n^2-2n+2}{n!}$.

(3). En déduire la convergence et la somme de la série $\sum \frac{n^2-2n+2}{n!}$.

□