AN05

Calculs de sommes de séries par télescopage

Version du 16-03-2023 à 09:13

Contexte

Dans tout ce qui suit, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite numérique.
On désigne par $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série numérique $\sum u_n$, c'est à dire :

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N},\ S_n &= u_0+u_1+\ldots+u_n\\ &= \sum_{k=0}^{n} u_k\end{aligned}$$

On rappelle que l'on dit que la série numérique $\sum u_n$ est convergente lorsque la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, c'est à dire lorsque $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S\in\mathbb{R}$ et on note alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S$ appellée somme de la série $\sum u_n$.

□

1. Cas où $u_n = \dfrac{1}{an^2+bn+c}$

Exemple 1 – Un cas simple

? La série $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$ est-elle convergente, et si oui, déterminer la somme de cette dernière ?

□

Étude de la convergence : On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Il est immédiat que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n \geq 0$.

Par ailleurs, on a clairement que : $\dfrac{1}{n(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$.

La série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente puisque $2>1$.

Ainsi, on a :

- $\sum u_n$ est une série à termes positifs
- $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$
- $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est une série convergente

donc d'après le théorème d'équivalence pour les séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ est convergente.

Calcul de la somme de la série $\sum u_n$: On remarque que :

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n &= \frac{1}{n(n+1)}\\ &= \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

Par suite, le terme général S_n de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ des sommes partielles de la série $\sum u_n$ est :

$$
\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n &= \sum_{k=1}^{n} u_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
&= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\
&= \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} \\
&= 1 - \frac{1}{n+1}
\end{aligned}
$$

Puisque $\frac{1}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc il vient que $S_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.

On en déduit donc que la somme de la série $\sum u_n$ est $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 1$.

Exemple 2 – Un autre cas simple

? La série $\sum \frac{1}{n(n-1)}$ est-elle convergente, et si oui, déterminer la somme de cette dernière ?

□

Étude de la convergence : On considère la suite $(u_n)_{n \geq \ldots}$ définie par : $\forall n \in$.

Il est immédiat que : $\forall n \in$, $u_n \geq 0$.

Par ailleurs, on a clairement que : $\underset{n \to +\infty}{\sim}$.

La série $\sum$ est une série de Riemann convergente puisque .

Ainsi, on a :

- $\sum u_n$ est une série à termes positifs
- $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim}$
- $\sum$ est une série convergente

donc d'après le théorème d'équivalence pour les séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ est convergente.

Calcul de la somme de la série $\sum u_n$: On remarque que : $\forall n \in$, $u_n =$

Par suite, le terme général S_n de la suite $(S_n)_{n \geq \ldots}$ des sommes partielles de la série $\sum u_n$ est :

$$
\begin{aligned}
\forall n \in \ ,\ S_n &= \sum_{k=\ldots}^{n} u_k \\
&=
\end{aligned}
$$

Puisque $\quad \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \quad$, donc il vient que $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \quad$.

On en déduit donc que la somme de la série $\sum u_n$ est $\sum_{n=\dots}^{+\infty} u_n = \quad$.

Exemple 3 – Vers les cas plus élaborés

? La série $\sum \frac{1}{(n+1)(n-2)}$ est-elle convergente, et si oui, déterminer la somme de cette dernière ?

□

Étude de la convergence : On considère la suite $(u_n)_{n\geq\dots}$ définie par : $\forall n \in \quad$.

Il est immédiat que : $\forall n \in \quad$, $u_n \geq 0$.

Par ailleurs, on a clairement que : $\quad \underset{n\to+\infty}{\sim} \quad$.

La série $\sum \quad$ est une série de Riemann convergente puisque $\quad$.

Ainsi, on a :

- $\sum u_n$ est une série à termes positifs
- $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \quad$
- $\sum \quad$ est une série convergente

donc d'après le théorème d'équivalence pour les séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ est convergente.

Calcul de la somme de la série $\sum u_n$: On remarque que : $\forall n \in \quad$, $u_n = \quad$

Par suite, le terme général S_n de la suite $(S_n)_{n\geq\dots}$ des sommes partielles de la série $\sum u_n$ est :

$$\forall n \in \quad, S_n = \sum_{k=\dots}^{n} u_k$$

$$=$$

Puisque $\quad \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \quad$, donc il vient que $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \quad$.

On en déduit donc que la somme de la série $\sum u_n$ est $\sum_{n=\dots}^{+\infty} u_n = \quad$.

Exemple 4 – Plus élaboré

?

La série $\sum \frac{1}{n^2-3n+2}$ est-elle convergente, et si oui, déterminer la somme de cette dernière ?

□

Étude de la convergence : On considère la suite $(u_n)_{n\geq\ldots}$ définie par : $\forall n \in$.

Il est immédiat que : $\forall n \in$, $u_n \geq 0$.

Par ailleurs, on a clairement que : $\underset{n\to+\infty}{\sim}$.

La série $\sum$ est une série de Riemann convergente puisque .

Ainsi, on a :
- $\sum u_n$ est une série à termes positifs
- $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim}$
- $\sum$ est une série convergente

donc d'après le théorème d'équivalence pour les séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ est convergente.

Calcul de la somme de la série $\sum u_n$: On remarque que : $\forall n \in$, $n^2-3n+2=(n-1)(n-2)$

On cherche alors $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\forall n \in$, $u_n = \frac{a}{n-1}+\frac{b}{n-2}$.

En réduisant au même dénominateur il vient :

$$\forall n \in \quad , \frac{a}{n-1}+\frac{b}{n-2} =$$

Par identification des deux numérateurs, $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ est solution du système :

On résout ce dernier par échelonnement en lignes de sa représentation matricielle :

On en déduit que $a=$ et $b=$.

Finalement, on a donc : $\forall n \in$, $u_n =$

Par suite, le terme général S_n de la suite $(S_n)_{n\geq \dots}$ des sommes partielles de la série $\sum u_n$ est :

$$\forall n \in \quad , S_n = \sum_{k=\dots}^{n} u_k$$
$$=$$

Puisque $\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}$, donc il vient que $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}$.

On en déduit donc que la somme de la série $\sum u_n$ est $\sum_{n=\dots}^{+\infty} u_n =$.

Exemple 5 – Encore plus élaboré

?

La série $\sum \frac{1}{n^2 - 4n + 3}$ est-elle convergente, et si oui, déterminer la somme de cette dernière ?

□

Étude de la convergence : On considère la suite $(u_n)_{n\geq \dots}$ définie par : $\forall n \in$.

Il est immédiat que : $\forall n \in \quad , u_n \geq 0.$

Par ailleurs, on a clairement que : $\underset{n\to+\infty}{\sim}$.

La série $\sum$ est une série de Riemann convergente puisque .

Ainsi, on a :
- $\sum u_n$ est une série à termes positifs
- $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim}$
- $\sum$ est une série convergente

donc d'après le théorème d'équivalence pour les séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ est convergente.

Calcul de la somme de la série $\sum u_n$: On remarque que : $\forall n \in \quad , n^2 - 4n + 3 = (n-1)(n+3)$

On cherche alors $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall n \in \quad , u_n = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n+3}.$

En réduisant au même dénominateur il vient :

$$\forall n \in \quad , \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n+3} =$$

Par identification des deux numérateurs, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ est solution du système :

On résout ce dernier par échelonnement en lignes de sa représentation matricielle :

On en déduit que $a =$ et $b =$.

Finalement, on a donc : $\forall n \in$, $u_n =$

Par suite, le terme général S_n de la suite $(S_n)_{n \geq \ldots}$ des sommes partielles de la série $\sum u_n$ est :

$$\forall n \in \quad , S_n = \sum_{k=\ldots}^{n} u_k$$

$$=$$

Puisque $\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow}$, donc il vient que $S_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow}$.

On en déduit donc que la somme de la série $\sum u_n$ est $\sum_{n=\ldots}^{+\infty} u_n =$.

2. Cas où $u_n = \dfrac{1}{(n-a)(n-b)(n-c)}$

Exemple 6 – Un premier cas

?

La série $\sum \dfrac{1}{(n-1)(n-2)(n-3)}$ est-elle convergente, et si oui, déterminer la somme de cette dernière ?

□

Étude de la convergence : On considère la suite $(u_n)_{n\geq \dots}$ définie par : $\forall n \in$.

Il est immédiat que : $\forall n \in$, $u_n \geq 0$.

Par ailleurs, on a clairement que : $\underset{n\to+\infty}{\sim}$.

La série $\sum$ est une série de Riemann convergente puisque .

Ainsi, on a :

- $\sum u_n$ est une série à termes positifs
- $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim}$
- $\sum$ est une série convergente

donc d'après le théorème d'équivalence pour les séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ est convergente.

Calcul de la somme de la série $\sum u_n$: Déterminons $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\forall n \in$, $u_n = \dfrac{a}{n-1} + \dfrac{b}{n-2} + \dfrac{c}{n-3}$

En réduisant au même dénominateur, il vient que :

$$\forall n \in \quad , \quad \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n-2} + \frac{c}{n-3} =$$

Par identification des deux numérateurs, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ est solution du système :

On résout ce dernier par échelonnement en lignes de sa représentation matricielle :

On en déduit donc que $a =$, $b =$ et $c =$.

Finalement, on a donc : $\forall n \in$, $u_n =$

Par suite, le terme général S_n de la suite $(S_n)_{n \geq \dots}$ des sommes partielles de la série $\sum u_n$ est :

$$\forall n \in \quad , S_n = \sum_{k=\dots}^{n} u_k$$
$$=$$

Puisque $\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow}$, donc il vient que $S_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow}$.

On en déduit donc que la somme de la série $\sum u_n$ est $\sum_{n=\dots}^{+\infty} u_n =$.

Exemple 7 – Son cousin...

? La série $\sum \dfrac{1}{(n+1)(n-4)(n+3)}$ est-elle convergente, et si oui, déterminer la somme de cette dernière ?

□

Étude de la convergence : On considère la suite $(u_n)_{n \geq \dots}$ définie par : $\forall n \in$.

Il est immédiat que : $\forall n \in$, $u_n \geq 0$.

Par ailleurs, on a clairement que : $\underset{n \to +\infty}{\sim}$.

La série $\sum$ ________ est une série de Riemann convergente puisque ________ .

Ainsi, on a :

- $\sum u_n$ est une série à termes positifs
- $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim}$ ________
- $\sum$ ________ est une série convergente

donc d'après le théorème d'équivalence pour les séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ est convergente.

Calcul de la somme de la série $\sum u_n$: Déterminons $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\forall n \in$ ____ , $u_n = \dfrac{a}{n+1} + \dfrac{b}{n-4} + \dfrac{c}{n+3}$

En réduisant au même dénominateur, il vient que :

$\forall n \in$ ____ , $\dfrac{a}{n+1} + \dfrac{b}{n-4} + \dfrac{c}{n+3} =$ ________

Par identification des deux numérateurs, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ est solution du système : ________

On résout ce dernier par échelonnement en lignes de sa représentation matricielle :

On en déduit donc que $a =$ ____ , $b =$ ____ et $c =$ ____ .

Finalement, on a donc : $\forall n \in$ ____ , $u_n =$ ________

Par suite, le terme général S_n de la suite $(S_n)_{n \geq \dots}$ des sommes partielles de la série $\sum u_n$ est :

$$\forall n \in \ldots,\ S_n = \sum_{k=\ldots}^{n} u_k$$
$$= \ldots$$

Puisque $\ldots \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ldots$, donc il vient que $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ldots$.

On en déduit donc que la somme de la série $\sum u_n$ est $\sum_{n=\ldots}^{+\infty} u_n = \ldots$.

3. Cas où $u_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{an^2+bn+c}\right)$

Exemple 8 – Un premier cas

?

La série $\sum \ln\left(1+\dfrac{1}{n(n+2)}\right)$ est-elle convergente, et si oui, déterminer la somme de cette dernière ?

□

Étude de la convergence : On considère la suite $(u_n)_{n\geq\ldots}$ définie par : $\forall n\in$.

Il est immédiat que : $\forall n\in$, $u_n\geq 0$.

Puisque $\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}$ 0, on a clairement que : $\underset{n\to+\infty}{\sim}$.

La série $\sum$ est une série de Riemann convergente puisque .

Ainsi, on a :

- $\sum u_n$ est une série à termes positifs
- $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim}$
- $\sum$ est une série convergente

donc d'après le théorème d'équivalence pour les séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ est convergente.

Calcul de la somme de la série $\sum u_n$: En réduisant au même dénominateur et d'après les propriétés opératoires de la fonction logarithme, on a :

$\forall n\in$, $u_n=$

Par suite, le terme général S_n de la suite $(S_n)_{n\geq\ldots}$ des sommes partielles de la série $\sum u_n$ est :

$$\forall n\in \quad, S_n = \sum_{k=\ldots}^{n} u_k$$
$$=$$

Puisque $\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}$, donc il vient que $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}$.

On en déduit donc que la somme de la série $\sum u_n$ est $\sum_{n=\ldots}^{+\infty} u_n =$.

Exemple 9 – Son cousin

?

La série $\sum \ln\left(1+\dfrac{1}{n^2-1}\right)$ est-elle convergente, et si oui, déterminer la somme de cette dernière ?

□

Étude de la convergence : On considère la suite $(u_n)_{n\geq\ldots}$ définie par : $\forall n \in$.

Il est immédiat que : $\forall n \in$, $u_n \geq 0$.

Puisque $\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a clairement que : $\underset{n\to+\infty}{\sim}$.

La série $\sum$ est une série de Riemann convergente puisque .

Ainsi, on a :

- $\sum u_n$ est une série à termes positifs
- $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim}$
- $\sum$ est une série convergente

donc d'après le théorème d'équivalence pour les séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ est convergente.

Calcul de la somme de la série $\sum u_n$: En réduisant au même dénominateur et d'après les propriétés opératoires de la fonction logarithme, on a :

$$\forall n \in \quad , u_n =$$

Par suite, le terme général S_n de la suite $(S_n)_{n\geq\ldots}$ des sommes partielles de la série $\sum u_n$ est :

$$\forall n \in \quad , S_n = \sum_{k=\ldots}^{n} u_k$$

$$=$$

Puisque $\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}$, donc il vient que $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}$.

On en déduit donc que la somme de la série $\sum u_n$ est $\displaystyle\sum_{n=\ldots}^{+\infty} u_n =$.