AL08

Sous-espaces vectoriels

Version du 25-01-2023 à 09:37

Contexte

Dans tout ce qui suit, E désigne un espace vectoriel qui sera principalement pour ce qui nous concerne $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ $\mathbb{R}_n[X]$.

□

1. Caractérisation d'un sous-espace vectoriel

Définition 1 – Sous-espace vectoriel

On dit qu'une partie F d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E lorsque la restriction à F des deux opérations « addition » et « multiplication par un réel » définies sur E vérifient tous les points de la définition précédente.
Cela confère alors à F une structure d'espace vectoriel.

Caractérisation

Une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si :

$\overrightarrow{0} \in F$

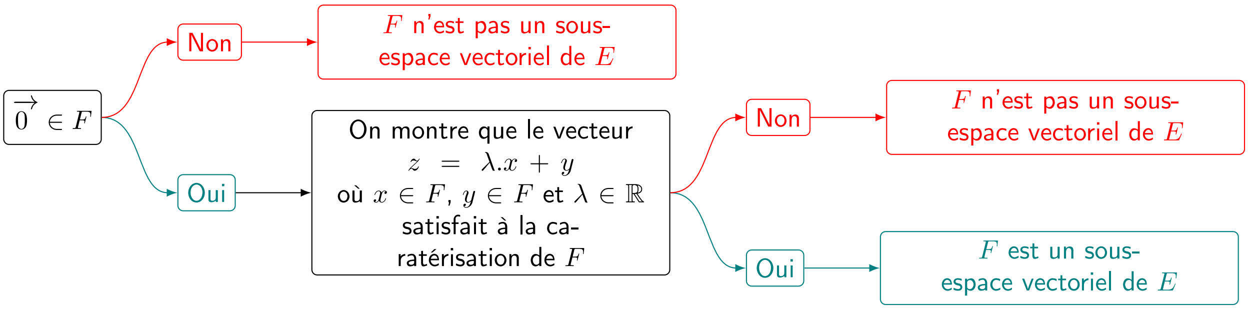
$\forall x \in F, \forall y \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda.x + y \in F$

On retiendra qu'un sous-espace vectoriel de E est une partie F stable par combinaison linéaire d'éléments de F.

□

Point méthode 1 – Montrer qu'une partie $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E

On commence au préalable par identifier le vecteur nul de l'espace vectoriel E dans lequel on travaille.



□

2. Reconnaître un sous-espace vectoriel

Exemple 1

?

Parmi les sous-ensembles suivants, indiquez lesquels ne peuvent pas être des sous-espavces vectoriels de ces espaces vectoriels

.

$F = \{(x, 1) \in \mathbb{R}^2,\ x \in \mathbb{R}\}$

$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y = 0\}$

$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ xy = 0\}$

$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x + y + 1 = 0\}$

$F = \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + z = 1\}$

$F = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}),\ M + \mathrm{I}_3 = (0)\}$

$F = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}),\ (M - \mathrm{I}_3)\left(M^2 - M\right) = (0)\}$

$F = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ P'(1) = 0\}$

□

3. Démontrer qu'un sous-ensemble est un sous-espace vectoriel

Exemple 2 – Sous-espace de $\mathbb{R}^4$

On considère le sous-ensemble F de $\mathbb{R}^4$ donné par : $F = \{(x, y, z, t)\,,\ x + y = 0 \text{ et } z + t = 0\}$.

? Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

$F \subset \mathbb{R}^4$

Le vecteur nul **appartient à F**

F **est stable par combinaison linéaire**

Soient , et on pose

Montrons que c'est à dire que

On en déduit donc que et que F est bien stable par combinaison linéaire.

□

Exemple 3 – Sous-espace de $\mathbb{R}^3$

Soient $u = (1, 1, -1)$ et $v = (1, 0, 1)$.
On considère le sous-ensemble F de $\mathbb{R}^3$ donné par : $F = \{(x, y, z)\,,\ (x + y - y)\,u + (2x - y + z)\,v = 0\}$.

? Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

$F \subset \mathbb{R}^3$

Le vecteur nul **appartient à F**

F **est stable par combinaison linéaire**

Soients , et on pose

Montrons que c'est à dire que

On en déduit donc que et que F est bien stable par combinaison linéaire.

□

Exemple 4 – Sous-espace de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = \mathrm{I}_3$.
On considère le sous-ensemble F de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donné par : $F = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}),\ AM - MA = 0\}$.

? Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

$F \subset \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

Le vecteur nul **appartient à F**

F **est stable par combinaison linéaire**

Soient , et on pose

Montrons que c'est à dire que

On en déduit donc que et que F est bien stable par combinaison linéaire.

□

Exemple 5 – Sous-espace de $\mathbb{R}_2[X]$

On considère le sous-ensemble F de $\mathbb{R}_2[X]$ donné par : $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ P(0) = 0 \text{ et } P'(0) = 0\}$.

?

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.

$F \subset \mathbb{R}_2[X]$

Le vecteur nul appartient à F

F est stable par combinaison linéaire

Soient , et on pose

Montrons que c'est à dire que

On en déduit donc que et que F est bien stable par combinaison linéaire.

□

Exemple 6 – Sous-espace de $\mathbb{R}_2[X]$

Soit $Q \in \mathbb{R}_2[X]$.
On considère le sous-ensemble F de $\mathbb{R}_2[X]$ donné par : $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ Q(0) \times P + Q'(0) \times P' = 0\}$.

? Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.

$F \subset \mathbb{R}_2[X]$

Le vecteur nul appartient à F

F est stable par combinaison linéaire

Soient , et on pose

Montrons que c'est à dire que

On en déduit donc que et que F est bien stable par combinaison linéaire.

□