AL04

Matrice et binôme de Newton

Version du 18-10-2022 à 19:14

Contexte

On rappelle que pour $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, on convient que $A^0 = \mathrm{I}_p$.

□

1. Développement avec le binôme de Newton

Théorème 1 – Formule du binôme de Newton pour les matrices

Pour A et B deux matrices carrées de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, telles que $A \times B = B \times A$, on a :
$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$$

□

Exemple 1 – Développement d'une puissance d'une combinaison linéaire

Calculer A^5 pour...

A, B et C trois matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que :

$$\begin{cases} A &= B + 2C \\ B^2 &= B \\ C^2 &= C \\ BC &= CB \\ BC &= (0) \end{cases}$$

Comme $BC = CB$ on peut appliquer le binôme de Newton pour obtenir que :

$(B+2C)^5 =$

Par ailleurs comme $B^2 = B$, on en déduit que : $\begin{cases} B^3 &= \dots \\ B^4 &= \dots \\ B^5 &= \dots \end{cases}$

De même : $\begin{cases} C^3 &= \dots \\ C^4 &= \dots \\ C^5 &= \dots \end{cases}$

Par suite, il vient que : $A^5 =$

□

Exemple 2 – Développement d'une puissance d'une combinaison linéaire

Calculer A^5 pour...

A, B et C trois matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$\begin{cases} A &= B+2C \\ B^2 &= 2B \\ C^2 &= -C \\ BC &= CB \\ BC &= 2\mathrm{I}_3 \end{cases}$$

Comme $BC = CB$ on peut appliquer le binôme de Newton pour obtenir que :

$(B+2C)^5 =$

Par ailleurs comme $B^2 = 2B$, on en déduit que : $\begin{cases} B^3 &= \dots \\ B^4 &= \dots \\ B^5 &= \dots \end{cases}$

De même : $\begin{cases} C^3 &= \dots \\ C^4 &= \dots \\ C^5 &= \dots \end{cases}$

Par suite, il vient que : $A^5 =$

□

2. Calcul de puissance et binôme de Newton

Exemple 3 – Puissance d'une matrice triangulaire supérieure d'ordre 2

Calculer A^8 pour...

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On commence par remarquer que :

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} \dots & 0 \\ 0 & \dots \end{pmatrix}}_{=D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \dots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=N}$$

et on vérifie que l'on a bien $D \times N = N \times D$:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 0 & \dots \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \dots & 0 \\ 0 & \dots \end{pmatrix} & \boxed{\begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} \dots & 0 \\ 0 & \dots \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \boxed{\begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}} \end{array}$$

On remarque notamment que $J^2 = (0)$ puisque :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 0 & \dots \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \boxed{\begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}} \end{array}$$

et donc $J^n = (0)$ pour ......

On calcule les premières puissances de D :

$$\begin{array}{cccc} & \begin{pmatrix} \dots & 0 \\ 0 & \dots \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \dots & 0 \\ 0 & \dots \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \dots & 0 \\ 0 & \dots \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \dots & 0 \\ 0 & \dots \end{pmatrix} & \boxed{\begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}} & \boxed{\begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}} & \boxed{\begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}} \end{array}$$

On conjecture une expression de D^n : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$

Puisque $N \times D = D \times N$ on peut utiliser le binôme de Newton :

$(D+N)^8 =$

et on en déduit alors que : $A^8 = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$

$\square$

Exemple 4 – Puissance d'une matrice carrée d'ordre 2

Calculer A^8 pour...

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

On commence par remarquer que :

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} \dots & 0 \\ 0 & \dots \end{pmatrix}}_{=D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \dots \\ \dots & 1 \end{pmatrix}}_{=J}$$

et on vérifie que l'on a bien $D \times J = J \times D$:

	$\begin{pmatrix} 1 & \dots \\ \dots & 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} \dots & 0 \\ 0 & \dots \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} \dots & 0 \\ 0 & \dots \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & \dots \\ \dots & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$

On calcule les premières puissances de J :

	$\begin{pmatrix} 1 & \dots \\ \dots & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & \dots \\ \dots & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & \dots \\ \dots & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & \dots \\ \dots & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$

On conjecture une expression de J^n : pour tout $n \dots\dots$, $J^n = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$

On calcule les premières puissances de D :

	$\begin{pmatrix} \dots & 0 \\ 0 & \dots \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \dots & 0 \\ 0 & \dots \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \dots & 0 \\ 0 & \dots \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} \dots & 0 \\ 0 & \dots \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$

On conjecture une expression de D^n : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$

Puisque $J \times D = J \times D$ on peut utiliser le binôme de Newton :

$(D+J)^8 =$

et on en déduit alors que : $A^8 = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$

□

Exemple 5 – Puissance d'une matrice triangulaire supérieure d'ordre 3

Calculer A^5 pour...

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On commence par remarquer que :

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}}_{=D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=T}$$

et on vérifie que l'on a bien $D \times T = T \times D$:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots \end{pmatrix} & \boxed{\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \boxed{\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}} \end{array}$$

On calcule les premières puissances de T :

$$\begin{array}{cccc} & \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \boxed{\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}} & \boxed{\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}} & \boxed{\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}} \end{array}$$

On conjecture une expression de T^n :

pour tout $n \dots\dots$, $T^n = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$

On calcule les premières puissances de D :

$$\begin{array}{cccc} & \begin{pmatrix} \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots \end{pmatrix} & \boxed{\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}} & \boxed{\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}} & \boxed{\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}} \end{array}$$

On conjecture une expression de D^n :

pour tout $n \dots\dots$, $T^n = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$

Puisque $T \times D = T \times D$ on peut utiliser le binôme de Newton :

$(T+D)^8 =$

et on en déduit alors que : $A^8 = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$

□